روشی برای حل مساله بارگیری پالت توزیع‌کننده با استفاده از برنامه‌ریزی پویا

محمدعلی هاتفی[۱]

چکیده

در مساله بارگیری پالت توزیع‌کننده، زیرمجموعه‌ای از مستطیل‌های مختلف (جعبه‌ها) با ارزش‌های وزنی متفاوت که روی یک فضای مستطیل‌شکل (پالت) چیده شوند مدنظراست، به‌طوری که مجموع ارزش وزنی جعبه‌های چیده شده، بیشینه شود. هم‌چنین برای کاربردی‌تر شدن طرح چیدمان به‌دست‌آمده، در قالب تابع هدف دوم مساله، مدنظر است که تا جای ممکن جعبه‌های هم‌نوع در کنار یکدیگر چیده شوند. مقاله حاضر روشی را برای حل این مساله ارائه می‌دهد که ایده‌ای جدید در به‌کارگیری برنامه‌ریزی پویا است. این روش شامل کالبدی حلقوی است به‌طوری که در هر دور از فرایند الگوریتم، بخشی از پالت، چیده می‌شود. تحلیل مقایسه‌ای انجام‌شده نشان می‌دهد که روش پیشنهادی، در شرایطی که زمان حل، مهم‌تر از ارزش وزنی چیدمان باشد، در موقعیت بهتری نسبت به‌روش‌های موجود قرار دارد. هم‌چنین مثال‌های حل شده نشان می‌دهند که از نظر چیدمان جعبه‌های هم‌نوع در کنار یکدیگر، روش پیشنهادی نسبت به‌روش‌های موجود، بهتر است.

کلمات کلیدی : مسائل برش و چیدمان، مساله بارگیری پالت توزیع‌کننده، برنامه‌ریزی پویا

A Technique for Solving Distributor's Pallet Loading Problem (DPLP), Using Dynamic Programming

M.A. Hatefi

ABSTRACT

The Distributor's Pallet Loading Problem consists of packing a fixed rectangular space (so-called pallet) with a subset of smaller rectangular shapes (so-called pieces) of different dimensions, which have different utility values, in such a way as to maximize the sum of the utility values of the packed pieces. Moreover, as the further objective function; it requires to as possible pack identical pieces as side by side, by means of applicability of the packing patterns. The present paper introduces a technique to solve the problem, in the way that includes a new idea to apply the dynamic programming and, as a matter of the second objective function. In each round of the proposed packing procedure loop, a part of pallet space is packed. The experimental results show that the proposed technique is better than the present methods in the state-of-the art, one the one hand, if solving time were better than packing value, on the other hand, as for packing identical pieces as side by side.

KEY WORDS : Cutting & Packing (C&P) problems, Distributor's Pallet Loading Problem (DPLP), Dynamic programming

---

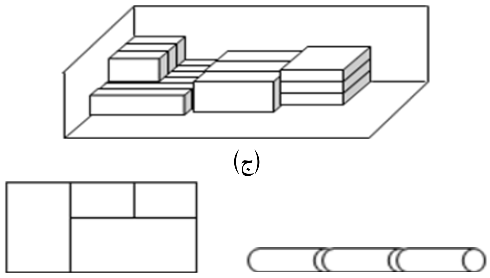
تاریخ دریافت مقاله:۱۳۸۸/۱/۲۶

تاریخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۹/۱۲/۲۳

[۱] دکتری مهندسی صنایع؛ دانشگاه علم و صنعت، عضو هیئت علمی پژوهشگاه صنعت نفت: Hatefima@yahoo.com.

۱- مقدمه

مسائل برش و چیدمان (C&P)[1] [۷] عبارتند از چیدمان مجموعه‌ای از قطعات در فضاهای چیدمان با هدف کمینه‌سازی فضای استفاده‌نشده. به چیدمان به‌دست‌آمده، طرح چیدمان می‌گویند که طبق شکل (۱) می‌تواند مانند برش میله، یک‌بعدی باشد [۲]، مانند برش تخته شیشه، دوبعدی باشد [۱۷] و یا مانند بارگیری کانتینر، سه‌بعدی باشد [۱۲].

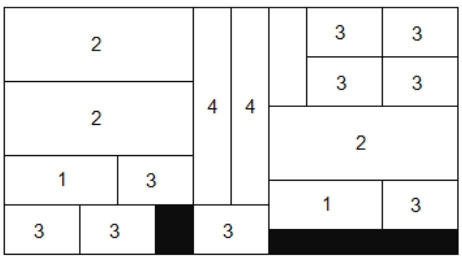


شکل (۱): طرح چیدمان (الف) یک‌بعدی، (ب) دوبعدی و (۳) سه‌بعدی

مقاله حاضر به مسائل بارگیری پالت توزیع‌کننده (DPLP)[2] [۱۰] مربوط است که در آن مجموعه‌ای از جعبه‌های مستطیل‌شکل هم‌ارتفاع و با طول، عرض و ارزش وزنی مختلف، روی یک پالت چیده می‌شود[۵]. از آنجا که چیدمان جعبه‌ها روی پالت، به‌صورت لایه‌های مشابه (هم‌طرح) انجام می‌شود، بنابراین در عمل این مساله دوبعدی بوده و شامل چیدمان مجموعه‌ای از قطعات مختلف مستطیل‌شکل در یک فضای مستطیل‌شکل است؛ به همین علت گاهی به آن، مساله چیدمان مستطیل (RPP)[3] [۱۹] نیز گفته می‌شود. مشابه اغلب مسائل C&P، DPLP نیز در عمل از نوع مسائل NP و با زمان حل نمایی است [۱۳]. در مبحث الگوسازی DPLP با استفاده مطلق از برنامه‌ریزی ریاضی، کارهای معدودی در ادبیات موضوع وجود دارند که اغلب متعلق به دهه ۹۰ میلادی هستند. روش مرجع [۱] در فضای دکارتی شامل مجموعه‌ای از محدودیت‌های جلوگیری از هم‌پوشانی قطعات است. در مرجع [٦]، مولفین، روش مرجع [۱] را مدنظر قرارداده و عیوب آن را مرتفع ساختند. روش مرجع [۱۵] نیز مانند روش مرجع [۱]، بوده و از تعداد کمتری محدودیت استفاده می‌نماید. روش مرجع [١٦] مبنی بر مجموعه ترکیبات خطی ارائه شده توسط مرجع [٤] بوده که شامل چیدن مجموعه‌ای از رشته‌های هم‌عرض، در کنار هم است. برای الگوسازی و حل DPLP، روش‌های ابتکاری مختلفی در سال‌های اخیر ارائه شده است. در روش مرجع [۱۳]، طرح چیدمان بلوکی متشکل از چهار قطعه به‌عنوان کلید اصلی چیدمان فضا مدنظر قرار گرفته است. در این روش پس از تعریف بلوک‌های چهارتایی، از برنامه‌ریزی ریاضی برای تولید طرح نهایی چیدمان، استفاده می‌شود و بنابراین کیفیت نتایج حل، قابل توجه است. در مرجع [۱۱]، روشی مبنی بر الگوریتم ژنتیک برای حل مساله مطرح شده است. هم‌چنین در مرجع [١٤] نیز از الگوریتم جستجوی تبو برای حل مساله استفاده شده است.

۲- تعریف مساله

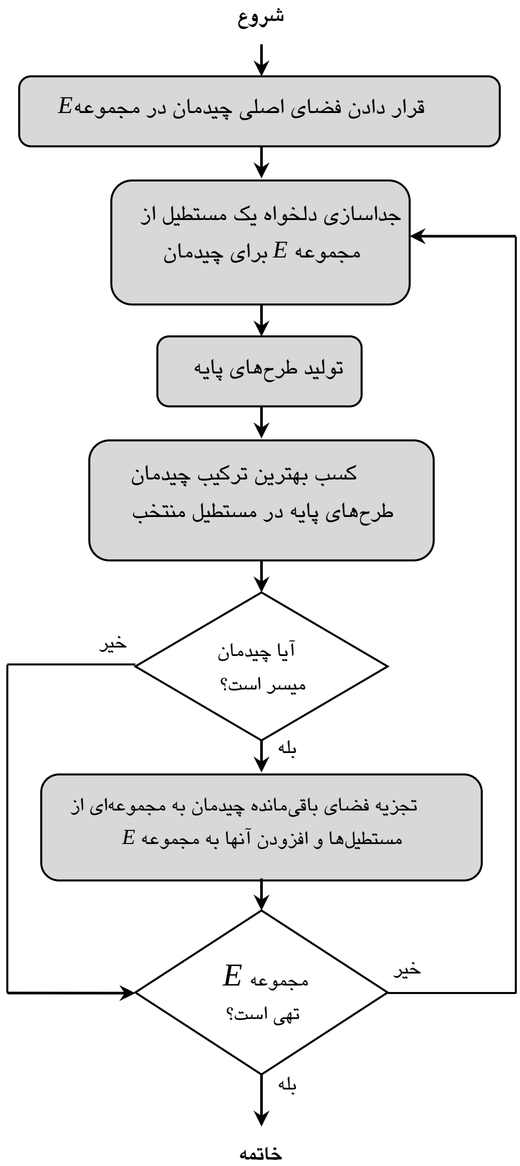
یک فضای چیدمان مستطیل‌شکل (که از این پس آن را پالت می‌نامیم) به‌طول L و عرض W را درنظر گرفته به‌طوری که $L \geq W$ باشد. هم‌چنین مجموعه‌ای از انواع قطعات مختلف مستطیل‌شکل (که از این پس آنها را جعبه می‌نامیم) را درنظر گرفته به‌طوری که جعبه نوع i $(i=1,\ldots,m)$ دارای طول l_i، عرض w_i و ارزش وزنی v_i است که در آن $l_i \geq w_i$ است. گفتنی است که ارتفاع جعبه‌ها با هم برابر بوده و اثری در الگوسازی و حل مساله ندارد. هدف اصلی مساله عبارتست از؛ چیدمان هر تعداد از هر نوع جعبه‌ای روی پالت، به‌طوری که مجموع ارزش وزنی جعبه‌های چیده‌شده، بیشینه شود. این مساله دوبعدی است. هم‌چنین، در طرح چیدمان نهایی، ممکن است از یک نوع جعبه چیده نشده یا از یک نوع به‌دفعات چیده شده باشد، به همین دلیل مساله از نوع نامحدود[4] است. این مساله از نوع وزین[5] است یعنی هر قطعه یک ارزش وزنی دارد که این ارزش وزنی ممکن است مساحت آن باشد. مساله حاضر، طبق نوع‌شناسی دیکهاف [۷]، با کد $2/B/O/R$ شناخته می‌شود. هم‌چنین این مساله بر طبق نوع‌شناسی واشر و همکاران [۱۸]، به‌عنوان یک مساله دوبعدی از نوع قرارگیری در فضای چیدمان بزرگ (SLOPP)[6] شناخته می‌شود. یکی از موضوعاتی که به کاربردی‌تر شدن طرح چیدمان کمک می‌نماید، پراکنده نبودن طرح چیدمان است، به این مفهوم که بهتر است جعبه‌های هم‌نوع در کنار یکدیگر چیده شوند. این موضوع تابع هدف دوم مساله است. در شکل (۲) نمونه‌ای از طرح چیدمان تقریباً غیرپراکنده نشان داده شده است که در آن قطعات یک، دو و سه به‌طور پراکنده چیده شده‌اند.



شکل (۲): طرح چیدمان تقریباً غیرپراکنده

۳- الگوسازی و حل مساله

مجموعه E، شامل تعدادی فضای مستطیل‌شکل با ابعاد مختلف را درنظر گرفته به‌طوری که در مورد هر مستطیل مفروض به‌طول L' و عرض W'، رابطه $L' \geq W'$ برقرار باشد. حل مساله بارگیری پالت توزیع کننده، طی فرایند نشان‌داده‌شده در شکل (۳) انجام می‌شود.



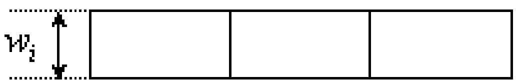
شکل (۳): الگوریتم حل مساله در یک نگاه

بدنه اصلی فرایند حل، شامل سه فاز است: (I) تولید طرح‌های چیدمان پایه که به‌اختصار آنها را طرح پایه می‌نامیم، (II) چیدن طرح‌های پایه در فضایی مستطیل‌شکل و (III) تجزیه فضای باقی‌مانده چیدمان فاز (II) به مجموعه‌ای از فضاهای مستطیل‌شکل جدید. همان‌طور که از شکل (۳) برمی‌آید، حل مساله شامل فرایندی حلقوی است که در آن سه فاز گفته‌شده مدام تا توقف فرایند، تکرار می‌شوند. فرایند حلقوی تا زمانی که هیچ مستطیلی برای چیدمان موجود نباشد تکرار می‌شود. در فازهای (I) و (II) از مساله کوله‌پشتی یک‌بعدی و در فاز (III) از برنامه‌ریزی پویا استفاده می‌شود. در حل مساله کوله‌پشتی، استفاده از اعداد مفید [۹]، در قالب معادله برنامه‌ریزی پویای بدون مرحله، پیشنهاد می‌شود. با درنظرگرفتن رویکرد فوق در الگوسازی مساله، روش حل پیشنهادی، در گروه روش‌های ترکیبی ابتکاری و برنامه‌ریزی ریاضی دسته‌بندی می‌شود.

۳-۱- فاز (I): تولید طرح‌های پایه

در اینجا مجموعه‌ای از طرح‌های پایه هم‌جنس[۷]، با طول، عرض و ارزش وزنی مشخص، تولید می‌شوند. منظور از هم‌جنس بودن، این است که هر طرح پایه، فقط شامل یک نوع جعبه باشد. در کل، به‌ازای هر یک از m جعبه، سه نوع طرح پایه تولید می‌شود. اکنون فرض نمایید قرار است برای چیدمان در فضای مستطیل‌شکل مفروضی به‌طول L' و عرض W'، یک طرح پایه از جنس قطعه شماره i تولید شود. توضیحات لازم درباره خصوصیات و چگونگی تولید هر یک سه نوع طرح پایه، در ادامه ارائه شده است.

طرح پایه تک‌جهت: در این طرح پایه، تمام قطعات به‌صورت فقط عمودی و یا فقط افقی در کنار هم چیده می‌شوند. در شکل (٤)، نمونه‌ای از طرح پایه افقی دیده می‌شود. طرح پایه عمودی نیز مشابه این شکل است با این تفاوت که در آن، قطعات به‌طور عمودی در کنار هم چیده می‌شوند.



شکل (۴): طرح پایه تک‌جهت افقی

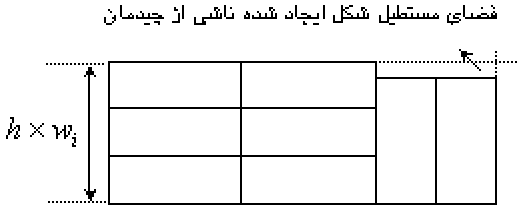
روابط (۱) تا (۳)، طرح پایه تک‌جهت افقی از جنس قطعه i را تولید می‌نمایند. در این روابط، y_i عبارتست از تعداد قطعه نوع i که در طرح پایه، چیده می‌شود. حل بهینه عبارتست از: $y_i = \lfloor L'/l_i \rfloor$. بنابراین می‌توان گفت؛ عرض طرح پایه برابر w_i، طول آن برابر $l_i \times \lfloor L'/l_i \rfloor$ و ارزش وزنی آن، برابر با $v_i \times \lfloor L'/l_i \rfloor$ خواهد شد. روابط تولید طرح پایه تک‌جهت عمودی نیز مشابه روابط (۱) تا (۳) است با این تفاوت که محدودیت (۲) به‌صورت $w_i \times y_i \leq W'$ تغییر می‌نماید.

$$Max \quad v_i \times y_i \qquad (۱)$$

$$St \quad l_i \times y_i \leq L' \qquad (۲)$$

$$y_i \in Integer \qquad (۳)$$

طرح پایه دوجهت: در این نوع، قطعات با دو جهت در کنار هم چیده می‌شوند که نمونه آن در شکل (٥) دیده می‌شود.



شکل (٥): طرح پایه دوجهت

طرح پایه دوجهت، به این صورت تشکیل می‌شود که چند قطعه به‌طور عمودی و چند ستون شامل h قطعه افقی روی هم، به‌طوری چیده می‌شوند که عرض فضای تهی مستطیل‌شکل ایجادشده، طبق شکل (٥)، از عرض قطعه، کمتر شود یعنی $h \times w_i - l_i < w_i$. همچنین ارتفاع چیدمان قطعات افقی روی هم نباید از طول قطعه، کمتر شود یعنی $h \times w_i \geq l_i$. در اینجا h متغیر تصمیم است. در شرایطی که نسبت l_i / w_i عدد صحیحی نباشد، فضای تهی مستطیل‌شکل گفته‌شده، پدید می‌آید (فضای خطچین در شکل (٥)) که طبق الگوریتم نهایی پیشنهادی، این فضا به مجموعه E افزوده می‌شود. با حل مساله (٤) تا (٨) طرح پایه دوجهت از جنس قطعه i ایجاد می‌شود. در این روابط، x_i و y_i عبارتند از تعداد قطعه نوع i که به‌ترتیب به‌صورت عمودی و افقی در طرح پایه، چیده می‌شوند. در حل نهایی مساله، عرض طرح پایه، برابر با $h \times w_i$، طول آن برابر با $w_i \times x_i + (l_i / h) \times y_i$ و ارزش وزنی آن، معادل $v_i \times (x_i + y_i)$ خواهد شد.

$$Max \quad v_i \times (x_i + y_i) \tag{٤}$$

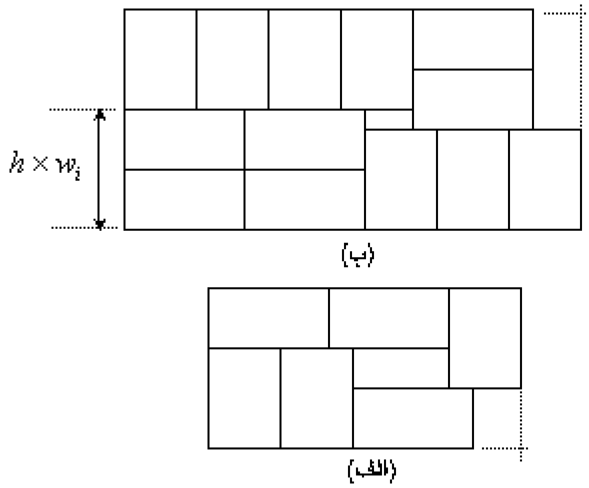
$$St \quad w_i \times x_i + (l_i/h) \times y_i \leq L' \tag{٥}$$

$$(l_i/w_i) \leq h \tag{٦}$$

$$(l_i/w_i) > h - 1 \tag{٧}$$

$$h\,,\ x_i\,,\ y_i\ \in Integer \tag{٨}$$

طرح پایه بلوکی: این نوع طرح پایه برگرفته از رویکرد مرجع [١٣] است و طبق نمونه‌های شکل (٦)، دو نوع دارد. در این نوع طرح پایه، قطعات به‌شکل بلوک‌هایی یکدیگر را پوشش می‌دهند. عرض این طرح پایه برابر است با $l_i + h \times w_i$ که در آن، h مقداری ثابت بوده و عبارتست از تعداد قطعاتی که در هر ستون، به‌صورت افقی روی هم انباشته می‌شوند. در طرح پایه بلوکی نوع یک، همواره h برابر با یک است. طرح پایه بلوکی نوع دو به شرطی استفاده می‌شود که عبارت l_i / w_i عدد صحیحی نباشد و با این شرایط، $h = [l_i / w_i] + 1$ خواهد بود. همان‌طور که در قسمت (ب) از شکل (٦) مشخص است، طرح پایه بلوکی نوع دو، از روی هم قرار گرفتن دو طرح پایه دوجهت به‌دست می‌آید.



شکل (٦): طرح پایه بلوکی (الف) نوع یک و (ب) نوع دو

روابط (٩) تا (١٤)، طرح پایه بلوکی نوع دو از جنس قطعه i را تولید می‌نماید. مساله تولیدکننده طرح پایه بلوکی نوع یک نیز مشابه همین روابط است با این تفاوت که جهت محدودیت‌های (١٢) و (١٣) معکوس شده، h برابر با یک می‌شود. در روابط (٩) تا (١٤)، x_i و y_i به‌ترتیب، تعداد قطعات عمودی و افقی قسمت پایینی طرح پایه و z_i و t_i به‌ترتیب تعداد قطعات عمودی و افقی قسمت بالایی آن هستند. برای مثال، در طرح پایه قسمت (ب) از شکل (٦)، x_i، y_i، z_i و t_i به‌ترتیب برابرند با ٣، ٤، ٤ و ٢. توجه نمایید که h یک مقدار ثابت است که برای طرح پایه بلوکی نوع یک برابر با یک و برای طرح پایه بلوکی نوع دو، برابر با $[l_i/w_i]+1$ است. همان‌طور که در شکل (٦) مشخص است، در ساختار چیدمان طرح پایه بلوکی، دو نوع فضای تهی مستطیل‌شکل یکی در مرکز ساختار و یکی در گوشه آن، ممکن است پدید آید که این موارد به مجموعه E افزوده می‌شوند.

$$Max \quad v_i \times (x_i + y_i + z_i + t_i) \tag{٩}$$

$$St \quad w_i \times x_i + (l_i/h) \times y_i \leq L' \tag{١٠}$$

$$w_i \times z_i + (l_i/h) \times t_i \leq L' \tag{١١}$$

$$w_i \times z_i \geq (l_i/h) \times y_i \tag{١٢}$$

$$w_i \times x_i \geq (l_i/h) \times t_i \tag{١٣}$$

$$x_i\,,\ y_i\,,\ z_i\,,\ t_i\ \in Integer \tag{١٤}$$

۳-۲- فاز (II): چیدمان طرح‌های پایه

با داشتن طرح‌های پایه تولیدشده در فاز (I)، می‌توان بهترین ترکیب چیدمان آنها را در فضای چیدمان منتخب، به‌دست آورد. این موضوع به کمک مساله کوله‌پشتی (۱۵) تا (۱۷) امکان‌پذیر است که هدف آن عبارت است از رسیدن به بیش‌ترین ارزش مجموع طرح‌های پایه چیده‌شده در فضای چیدمان منتخب. در مساله کوله‌پشتی، j برابر با ۱، ۲، ۳، ٤ و ٥ به‌ترتیب به طرح‌های پایه تک‌جهت عمودی، طرح پایه تک‌جهت افقی، طرح پایه دوجهت، طرح پایه بلوکی نوع یک و طرح پایه بلوکی نوع دو اشاره دارد. در این روابط، α_{ij} عبارتست از تعداد طرح پایه نوع j از جنس قطعه i که باید در فضای چیدمان منتخب به ابعاد $L'\times W'$، چیده شود و U_{ij} عبارتست از مجموع ارزش وزنی قطعات در طرح پایه نوع j از جنس قطعه i. λ_{ij} نیز نشان‌دهنده عرض طرح پایه نوع j از جنس قطعه i است.

$$Max \quad \sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\times U_{ij} \qquad (۱۵)$$

$$St \quad \sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\times \lambda_{ij} \le W' \qquad (۱٦)$$

$$\forall \alpha_{ij} \ge 0 \quad \& \in Integer \qquad (۱۷)$$

پس از تعیین طرح‌های پایه برنده در مساله کله‌پشتی، ترتیب چیدن طرح‌های پایه روی هم باید طوری باشد که طول طرح‌های پایه از پایین به بالا افزایشی نباشد، تا بدین ترتیب یک فضای خالی پله‌ای در انتهای فضای چیدمان به‌وجود آید.

۳-۳- فاز (III): تجزیه فضای باقی‌مانده

در این فاز، فضاهای خالی ایجادشده ناشی از چیدمان فاز (II)، به مجموعه Eافزوده می‌شوند. در صورتی که جزو طرح‌های پایه برنده در چیدمان فاز (II)، طرح پایه دوجهت یا بلوکی وجود داشته‌باشد، به‌سادگی، فضاهای تهی مستطیل‌شکل داخل آنها به مجموعه E افزوده می‌شود.

همان‌طور که در قسمت قبل، گفته شد، در انتهای فاز (II)، بعد از چیدن طرح‌های پایه روی هم، در انتهای چیدمان، فضای پله‌ای‌شکلی ایجاد می‌شود (طبق شکل (۷)). برای تجزیه این فضا به مجموعه‌ای از مستطیل‌ها و افزودن به مجموعه E، در اینجا یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا ارائه می‌شود. شکل (۷) را درنظر بگیرید. فضا پله‌ای روی مرز خط‌چین‌ها، به مجموعه‌ای از مستطیل‌ها تجزیه می‌شود. عمل تجزیه، به‌کمک ستون‌ها (C) و سطرهایی (R) است که تعداد آنها با هم برابر و مساوی با T است. برای مثال در شکل (۷)، T برابر با ٤ است.

اکنون، باتوجه به شکل (۷)، تعاریف زیر را درنظر بگیرید:

مرحله: مرحله k عبارتست از برنامه‌ریزی چیدمان برای فضای شامل ستون ۱ تا ستون k $(k=1,\dots,T)$، بنابراین تعداد مراحل با تعداد ستون‌ها برابر است.

وضعیت: هر وضعیت در مرحله k به‌کمک یک کد رشته‌ای عددی شامل k کاراکتر، مشخص می‌شود. عدد کاراکتر اول، مشخص می‌نماید که در ستون اول، چیدمان تا چه سطری مدنظر است و عدد کاراکتر دوم مشخص می‌نماید که در ستون دوم، چیدمان تا چه سطری مدنظر است و همین‌طور تا آخر. برای مثال، در مرحله دوم (k برابر با ۲) از شکل (۷)، برنامه‌ریزی برای فضایی با گوشه‌های ۱-٦-۲-۱۲-۱٥-۱۸-۱۹-٥-۱، کد "٤۳" را دارد. اگر اجزای کد رشته‌ای گفته‌شده برای مرحله k را به‌ترتیب با a_1 تا a_k نمایش دهیم، آنگاه روابط (۱۸) و (۱۹) همواره برقرار خواهند بود. به این ترتیب، در مرحله k، تعداد $T!/(k!\times(T-k)!)$ وضعیت مطرح می‌شود. وضعیت‌ها را با s نمایش داده و خواهیم داشت: $s=1,\dots,T!/(k!\times(T-k)!)$.

$$\forall a_j \ge k \quad j=1,\dots,k \qquad (۱۸)$$

$$\forall a_j \ge a_{j+1} \quad j=1,\dots,k-1 \qquad (۱۹)$$

تصمیم: در مرحله k، تصمیم‌ها نیز به‌کمک یک کد رشته‌ای عددی شامل k کاراکتر، مشخص می‌شوند که از نظر تعریف، به‌طور دقیق مشابه کد رشته‌ای وضعیت‌ها است. تنها تفاوت این است که اگر اجزای کد رشته‌ای تصمیم برای مرحله k را به‌ترتیب با b_1 تا b_k نمایش دهیم، آنگاه روابط (۲۰) و(۲۱) همواره برقرار هستند. تعداد تصمیم در مرحله k، با عبارت $(T-k+1)\times k$ مشخص می‌شود. تصمیم‌ها را با d نمایش می‌دهیم. در مرحله k، خواهیم داشت: $d=1,\dots,(T-k+1)\times k$. گفتنی است که در کل مراحل، تعداد $(T/6)\times(T^2+3\times T+2)$ فضای مستطیل‌شکل، برنامه‌ریزی می‌شوند.

$$b_j \ge k \quad b_j = 0 \quad \text{یا} \qquad j=1,\dots,k \qquad (۲۰)$$

$$\left.\begin{array}{ll} b_1=\dots=b_{j-1}=0 & b_j=0 \\ b_{j+1}=\dots=b_k & b_j\ne 0 \end{array}\right. \quad j=1,\dots,k \qquad (۲۱)$$

عایدی: مقدار عایدی در تصمیم d در وضعیت s در مرحله k، عبارتست از مجموع ارزش حاصل از چیدمان طرح‌های پایه در مستطیل ایجادشده مشترک با ستون شماره d. در اینجا،

مقدار عایدی را با $R(k,s,d)$ نمایش می‌دهیم.

تابع انتقال وضعیت: در تصمیم d در وضعیت s در مرحله k، تابع انتقال وضعیت که آن را با M نمایش می‌دهیم به‌صورت رابطه (۲۲) تعریف می‌شود که در اینجا کد رشته‌ای مربوط به وضعیت‌های مرحله k-1 با کاراکترهای c_1 تا c_{k-1} نشان داده شده است.

$$\begin{array}{ll} c_j = a_j & b_j = 0 \\ c_j = k-1 & b_j \neq 0 \end{array} \qquad j = 1,\ldots,k-1 \qquad (۲۲)$$

ارزش وضعیت (تابع هدف): طبق رابطه (۲۳)، به‌ازای مرحله k و وضعیت s، مقدار تابع هدف عبارتست از بیشینه مجموع عایدی تصمیم‌ها به‌علاوه تابع هدف بهینه مرحله قبل به‌ازای تابع انتقال.

$$F(k,s) = \max\{F(k-1,M) + R(k,s,d)\} \qquad (۲۳)$$

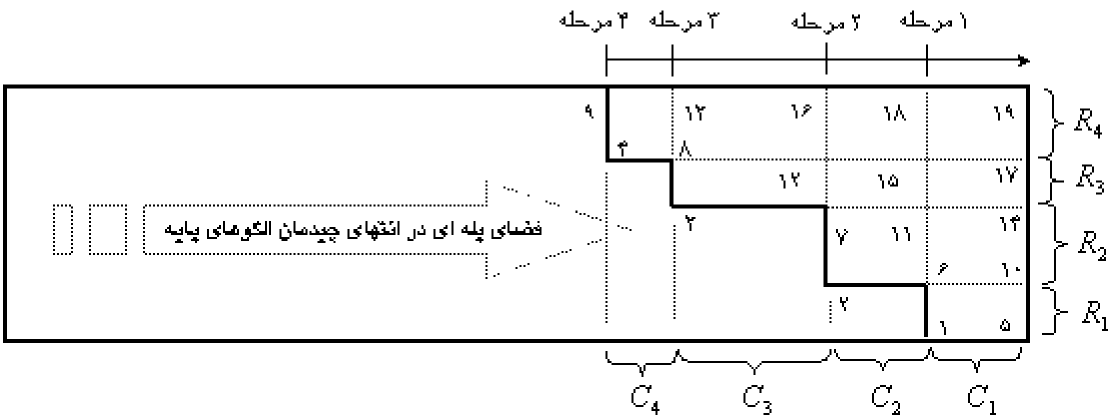
اکنون فرایند برنامه‌ریزی پویا، برای مثال شکل (۷) را درنظر بگیرید. در این مثال، طبق

جدول (۱)، تعداد مستطیل‌های برنامه‌ریزی‌شده، ۲۰ عدد است که مقادیر بهینه ناشی از چیدمان در آنها با U1 تا U20 نشان داده شده است. فرایند برنامه‌ریزی پویا را در

جدول (۲) تا جدول (۵) پی‌گیری نمایید که در آنها ستون‌ها مبین تصمیم و سطرها نشانگر وضعیت هستند. برای نمونه، اگر در جدول (۵) بین چهار تصمیم موجود، تصمیم سوم بهترین گزینه باشد، در جدول (٤) بین دو تصمیم اول و سوم، تصمیم اول برتر باشد، در

جدول (۲) تصمیم دوم و در

جدول (۱) نیز تصمیم چهارم انتخاب خواهند شد. نتیجه این که فضای پله‌ای ایجاد شده در انتهای شکل (۷)، به مستطیل های U4، U7، U11 و U19 تجزیه می‌شود.



شکل (۷): فضای پله‌ای ایجادشده پس از چیدمان طرح‌های پایه

جدول (۱): مستطیل‌های مورد برنامه‌ریزی مثال شکل (۷)

کد تصمیم	آدرس گوشه‌های مستطیل	مقدار عایدی	کد تصمیم	آدرس گوشه‌های مستطیل	مقدار عایدی
۱	۱-۵-۱۰-٦-۱	U1	۰۰۳	۳-۷-۱۲-۸-۳	U11
۲	۱-۵-۱٤-۱۱-۱	U2	۰۳۳	۳-۱۱-۱۵-۸-۳	U12
۳	۱-۵-۱۷-۱۵-۱	U3	۳۳۳	۳-۱٤-۱۷-۸-۳	U13
٤	۱-۵-۱۹-۱۸-۱	U4	۰۰٤	۳-۷-۱٦-۱۳-۳	U14
۰۲	۲-٦-۱۱-۷-۲	U5	۰٤٤	۳-۱۱-۱۸-۱۳-۳	U15
۲۲	۲-۱۰-۱٤-۷-۲	U6	٤٤٤	۳-۱٤-۱۹-۱۳-۳	U16
۰۳	۲-٦-۱۵-۱۲-۲	U7	۰۰۰٤	٤-۸-۱۳-۹-٤	U17
۳۳	۲-۱۰-۱۷-۱۲-۲	U8	۰۰٤٤	٤-۱۲-۱٦-۹-٤	U18
۰٤	۲-٦-۱۸-۱٦-۲	U9	۰٤٤٤	٤-۱۵-۱۸-۹-٤	U19
٤٤	۲-۱۰-۱۹-۱٦-۲	U10	٤٤٤٤	٤-۱۷-۱۹-۹-٤	U20

جدول (۲): مرحله ۱ برنامه‌ریزی مثال شکل (۷) (ستون‌ها تصمیم و سطرها نشان‌دهنده وضعیت هستند)

شماره	→	١	٢	٣	٤	ارزش
↓	کد	١	٢	٣	٤	وضعیت
١	١	$U1$	-	-	-	$F(1,1)$
٢	٢	-	$U2$	-	-	$F(1,2)$
٣	٣	-	-	$U3$	-	$F(1,3)$
٤	٤	-	-	-	$U4$	$F(1,4)$

جدول (۳): مرحله ۲ برنامه‌ریزی مثال شکل (۷) (ستون‌ها تصمیم و سطرها نشان‌دهنده وضعیت هستند)

شماره	→	١	٢	٣	٤	٥	٦	ارزش
↓	کد	٠٢	٠٣	٠٤	٢٢	٣٣	٤٤	وضعیت
١	٢٢	$U5+F(1,2)$	-	-	$U6+F(1,1)$	-	-	$F(2,1)$
٢	٣٢	$U5+F(1,3)$	-	-	-	-	-	$F(2,2)$
٣	٤٢	$U5+F(1,4)$	-	-	-	-	-	$F(2,3)$
٤	٣٣	-	$U7+F(1,3)$	-	-	$U8+F(1,1)$	-	$F(2,4)$
٥	٤٣	-	$U7+F(1,4)$	-	-	-	-	$F(2,5)$
٦	٤٤	-	-	$U9+F(1,4)$	-	-	$U10+F(1,1)$	$F(2,6)$

جدول (۴): مرحله ۳ برنامه‌ریزی مثال شکل (۷) (ستون‌ها تصمیم و سطرها نشان‌دهنده وضعیت هستند)

شماره	→	١	٢	٣	٤	٥	٦	ارزش
↓	کد	٠٠٣	٠٠٤	٠٣٣	٠٤٤	٣٣٣	٤٤٤	وضعیت
١	٣٣٣	$U11+F(2,4)$	-	$U12+F(2,2)$	-	$U13+F(2,1)$	-	$F(3,1)$
٢	٤٣٣	$U11+F(2,5)$	-	$U12+F(2,3)$	-	-	-	$F(3,2)$
٣	٤٤٣	$U11+F(2,6)$	-	-	-	-	-	$F(3,3)$
٤	٤٤٤	-	$U14+F(2,6)$	-	$U15+F(2,3)$	-	$U16+F(2,1)$	$F(3,4)$

جدول (۵): مرحله ۴ برنامه‌ریزی مثال شکل (۷) (ستون‌ها تصمیم و سطرها نشان‌دهنده وضعیت هستند)

شماره	→	١	٢	٣	٤	ارزش
↓	کد	٠٠٠٤	٠٠٤٤	٠٤٤٤	٤٤٤٤	وضعیت
١	٤٤٤٤	$U17+F(3,4)$	$U18+F(3,3)$	$U19+F(3,2)$	$U20+F(3,1)$	$F(4,1)$

۳-٤- روند نهایی حل DPLP

الگوریتم فرایند پیشنهادی شکل (۳)، عبارتست از:

الف) مجموعه E را به‌صورت $E=\{L\times W\}$ تشکیل دهید.

ب) به‌دلخواه یک مستطیل از مجموعه E انتخاب نموده، L' را برابر طول آن و W' را برابر عرض آن قرار دهید. این مستطیل را از مجموعه E حذف نمایید.

ج) در فضای چیدمان $L'\times W'$، به‌ازای هر یک از m قطعه، به‌کمک روابط (١) تا (١٤)، طرح‌های پایه را تولید نمایید.

ه) به‌کمک مساله (١٥) تا (١٧)، بهترین ترکیب چیدمان طرح‌های پایه را به‌دست آورید.

و) در صورتی که جزو طرح‌های پایه منتخب، طرح پایه دوجهت یا بلوکی وجود دارد، فضاهای تهی مستطیل‌شکل داخل آنها را به مجموعه E بیافزایید. هم‌چنین فضای پله‌ای انتهای چیدمان را به فضاهای مستطیل‌شکل تجزیه نمایید و آنها را به مجموعه E بیافزایید.

ط) اگر مجموعه E تهی است، الگوریتم خاتمه یافته است، در غیر این صورت، به قدم (ب) بازگردید.

۳-۵- پراکندگی طرح چیدمان

پراکندگی طرح چیدمان به جدا بودن محل چیدمان قطعات مشابه اشاره دارد. میزان پراکندگی کمتر گویای کاربردی‌تر بودن طرح چیدمان است. در اینجا به‌سادگی شاخص پراکندگی (DI)[٨] را طبق رابطه (٢٤) تعریف می‌نماییم.

$$DI=-m+\sum_{i=1}^{m}\theta_i \qquad (٢٤)$$

در این رابطه، θ_i عبارتست از تعداد محل‌های تجمع قطعه نوع i در سطح طرح چیدمان. اگر تمام قطعات مشابه در یک محل در

کنار هم چیده شده باشند، θ برای آن قطعات برابر با یک خواهد بود و اگر θ برای تمام قطعات برابر با یک باشد، شاخص پراکندگی یعنی DI برابر با صفر خواهد شد که این بهترین وضعیت است. برای مثال مقدار DI برای طرح چیدمان (الف) شکل (۲)، برابر با ۰ (٤+٤-) و برای برای طرح چیدمان (ب) این شکل، برابر با ٤ (۱+۳+۲+۲+٤-) است.

در روش پیشنهادی این مقاله، با توجه به این که طرح های پایه همجنس تولید و چیده می‌شوند، انتظار است که طرح نهایی چیدمان به‌دست‌آمده، دارای مقدار DI ناچیزی باشد.

٤- تجزیه و تحلیل

این قسمت به تجزیه و تحلیل روش پیشنهادی می‌پردازد.

٤-۱- مقایسه نتایج

مقاله شامل روشی ابتکاری مبنی بر برنامه‌ریزی پویا است، بنابراین انتظار نیست که جواب بهینه عمومی کسب شود. باتوجه به این موضوع، در اینجا دو روش ابتکاری با کد 2/B/O/R، از مراجع [۱۳] و [۱۱] برای مقایسه انتخاب شده‌اند. برای مقایسه، دوازده مساله نمونه انتخاب و به‌کمک این دو روش و روش پیشنهادی این مقاله، با استفاده از یک کامپیوتر پنتیوم I حل شدند که نتایج در جدول (٦) آورده شده است. علت انتخاب کامپیوتر سرعت پایین، تفکیک زمان حل مسائل است. همان‌طور که از نتایج به‌دست‌آمده برمی‌آید، از لحاظ ارزش چیدمان، روش پیشنهادی نسبت به‌روش مرجع [۱۳] در موارد معدودی، ضعیف‌تر بوده نسبت به‌روش مرجع [۱۱] در اغلب موارد بهتر است. در واقع می‌توان گفت روش پیشنهادی نسبت به‌روش مرجع [۱۳] که گرایش بیش‌تری به برنامه‌ریزی ریاضی دارد، در ٦۰٪ موارد (مسائل شماره ۱، ٤، ٦، ۹، ۱۰، ۱۱ و۱۲) به‌طور متوسط دارای ۲۵٪ کیفیت کم‌تر بوده و در ۲۵٪ موارد (مسائل شماره ۲، ٥ و۷) به‌طور متوسط دارای ۲۰٪ کیفیت بهتر است. در مقابل، از نظر زمان حل مساله، روش پیشنهادی در تمام مسائل حل‌شده، زمان حل بسیار کم‌تری نسبت به‌روش مرجع [۱۳] دارد. در مقایسه با روش مرجع [۱۱]، روش پیشنهادی در تمام مسائل، به‌جز مسائل ٥ و ۱۰، ارزش چیدمان بهتری داشته و زمان حل در هر دو روش، بسیار به هم نزدیک است. در پایان می‌توان گفت روش پیشنهادی نسبت به‌روش مرجع [۱۱] دارای برتری نسبی بوده و نسبت به‌روش مرجع [۱۳] نیز در شرایطی که برای تصمیم‌گیرندگان، زمان حل، مهم‌تر از ارزش چیدمان باشد، در موقعیت بهتری قرار دارد.

از سوی دیگر ملاحظه می‌شود که در تمام مسائل حل‌شده، طرح‌های چیدمان حاصل از روش پیشنهادی شاخص پراکندگی بسیار اندکی دارد، این در حالی است که روش‌های مراجع [۱۱] و[۱۳] دارای خروجی‌هایی با پراکندگی به‌نسبت بالایی در طرح چیدمان هستند.

٤-۲- پیچیدگی محاسباتی

هسته اصلی روش پیشنهادی، یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا است که با توجه به تعاریف مراحل، وضعیت‌ها و تصمیم‌ها، پیچیدگی زمانی محاسبه از درجه $O(n^3)$ است. هم‌چنین، الگوریتم، ماهیتی حلقوی دارد که در هر تکرار آن به تعداد قطعات ورودی، طرح‌های چیدمان پایه تولید می‌شود، بنابراین پیچیدگی زمانی کل الگوریتم در بدترین حالت برابر $O(n^3 \times n)$ یا $O(n^4)$ خواهد شد.

جدول (۶): نتایج حل مسائل نمونه (زمان‌های حل، به ثانیه هستند)

مساله	روش مرجع [۱۳]			روش مرجع [۱۱]			روش پیشنهادی		
	زمان حل	تابع هدف	DI	زمان حل	تابع هدف	DI	زمان حل	تابع هدف	DI
۱	٦.٣	۱٤٥۰	۱	۱.۲	۷٥۰	۲	۱.۳	۹۳٦	۰
۲	٤.٥	۲۲٥۰	۲	۲.۰	۱٦۰۰	۳	۲.۰	۲۸٥۰	۱
۳	۷.۲	۱۳۸۰	۲	۰.۲	۹٦۰	۰	۰.٥	۱۳۸۰	۱
٤	۲.٥	۱٤٥۰	۰	۰.٥	٥۰۰	۰	۱.۸	۹٥۰	۰
٥	۷.٥	٥٥۰	۳	۰.٦	۹۳۰	۱	۲.۰	۸۸۰	۰
٦	۹.۳	۲۳٦٥	۱	۰.۹	۱۳۳۰	۲	۰.۱	۲۱۰۰	۰
۷	٤.٦	۸٥۰	٤	۰.۸	۸٥۰	۳	۱.۰	۸۷٥	۲
۸	٥.٦	۱۰٤۰	۳	۰.٦	۸۳٥	۳	۰.۹	۱۰٤۰	۱
۹	٦.۹	۲۲۰۰	۲	۰.۹	۱۲۲۰	٤	۰.۹	۱۷٦۰	۰
۱۰	٦.٦	۹۸٥	۸	۰.٤	۱۱۰۰	٥	۰.٥	۹٦۰	۰
۱۱	۱۰.۲	۱٤۲۰	٤	۱.۲	۸٥۰	۲	۱.۰	۱۱۳٥	۰
۱۲	٦.٦	۱٥٥۰	٦	۰.۳	٦٦٥	۷	۰.٦	۷۰۰	۱

۰	۹۳٦	۱.۳	۰	۷٥۰	۱.۲	۳	۱٤٥۰	٦.۳	۱۳

۵- نتیجه‌گیری

این مقاله، روشی را برای حل مساله بارگیری پالت توزیع‌کننده ارائه داد که ایده‌ای جدید در به‌کارگیری برنامه‌ریزی پویا دارد؛ به‌طوری که در آن مدنظر بود که علاوه بر بیشینه‌سازی ارزش وزنی چیدمان، شاخص پراکندگی طرح چیدمان نیز کمینه شود یعنی تا جای ممکن، جعبه‌های هم‌نوع در کنار یکدیگر چیده شوند. روش پیشنهادی با روش‌های ابتکاری موجود در ادبیات موضوع، مقایسه شد. این مقایسه نشان داد که این روش از نظر مقدار تابع هدف و مدت زمان حل، در یک نقطه تعادلی بین روش‌های موجود قرار دارد، یعنی این که در شرایطی که برای تصمیم‌گیرندگان، زمان حل، مهم‌تر از ارزش چیدمان باشد، روش پیشنهادی در موقعیت بهتری نسبت به‌روش‌های موجود، قرار دارد. هم‌چنین شاخص پراکندگی طرح‌های چیدمان تولید شده، نسبت به‌روش‌های موجود در ادبیات موضوع کمتر بودند. امید است که به‌کارگیری روش پیشنهادی این مقاله، در راه کاهش زمان و هزینه‌های تولید و حمل و نقل، برای متخصصین، مفید باشد.

۶- مراجع

[۱] Beasley, J.E.; “An exact two-dimensional non-guillotine cutting tree search procedure”, Operations Research, vol. 33, p.p. 49-64, 1985.

[۲] Cui, Y.; Yang, Y.; “A heuristic for the one-dimensional cutting stock problem with usable leftover”, European Journal of Operational Research, vol. 204(2), p.p. 245-250, 2010.

[۳] Bishoff, E.E.; Dowsland, W.B.; “An application of the micro to product design and distribution”, Journal of Operational Research Society, vol. 33, p.p. 271-280, 1982.

[٤] Browne, D.J.; “An improved BL lower bound”, Information Process Letters, vol. 11, p.p. 37-39, 1980.

[٥] Caprara, A.; Monaci, M.; “On the two-dimensional knapsack problem”, Operations Research Letters, vol. 32, p.p. 5–14, 2004.

[٦] Chen, C.S.; Sarin, S.; Ram, B.; “The pallet packing for un-uniform box sizes”, International Journal of Production Research, vol. 29, p.p. 1963-1968, 1991.

[۷] Dychoff, H.; “A typology of cutting and packing problems”, European Journal of Operational Research, vol. 44, p.p. 145-159, 1990.

[۸] George, J.A.; Rabinson, D.F.; “A heuristic for packing boxes into a container”, Computers & Operation Research, vol. 7, p.p. 147-156, 1980.

[۹] Hertz, J.; “A recursive computing procedure for two-dimensional stock-cutting”, IBM Journal of Research, vol. 16, p.p. 462-469, 1972.

[۱۰] Glaydston, M.R.; Luiz, A.N.L.; “Lagrangean relaxation with clusters and column generation for the manufacturer's pallet loading problem Generating unconstrained two-dimensional non-guillotine cutting patterns by a recursive partitioning algorithm”, Computers and Operations Research, vol. 34(9), p.p. 2695-2708, 2007.

[۱۱] Lipnitskij, A.A.; “Use of genetic algorithms for solution of the rectangle-packing problem”, Cybernetics and Systems Analysis, vol. 38(6), p.p. 943–946, 2002.

[۱۲] Dereliand, T.; Sena, D.; “A hybrid bee(s) algorithm for solving container loading problems”, Applied Soft Computing, vol. 11(2), p.p. 2854–2862, 2011.

[۱۳] Scheithauer, G.; Sommerweiss, U.; “4-Block heuristic for the rectangle-packing problem”, European Journal of Operational Research, vol. 108, p.p. 529–526, 1998.

[۱٤] Shigehiro, Y.; Koshiyama, S.; Masuda, T.; “New approach to rectangle packing problem based on stochastic tabu search”, Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers, vol. 40(7), p.p. 747-754, 2004.

[۱٥] Tsai, R.D.; Maelstrom, E.M.; Kuo, W.; “Three-dimensional palletization of mixed box sizes”, IIE Transactions, vol. 25(4), p.p. 64-75, 1993.

[۱٦] Tsai, R.D.; Maelstrom, E.M.; & Meeks, H.D.; “A two-dimensional palletizing procedure for warehouse loading operations”, IIE Transactions, vol. 20, p.p. 418-425, 1998.

[۱۷] Macedo, R.; Alves, C.; Decarvalho, V.; “Arc-flow model for the two-dimensional guillotine cutting stock problem”, Computers and Operations Research, vol. 37(6), p.p. 991–1001, 2010.

[۱۸] Wascher, G.; Haubner, H.; Schumann H. “An improved typology of cutting and packing problems”, European Journal of Operational Research, vol. 183, p.p. 1109–1130, 2007.

[۱۹] Chen, M.; Huang, W.; “A two-level search algorithm for 2D rectangular packing problem”, Computers and Industrial Engineering, vol. 53, p.p. 123–136, 2007.

۷- زیرنویس‌ها

[۱] Cutting & Packing
[۲] Distributor’s Pallet Loading Problem
[۳] Rectangle Packing Problem
[٤] Unconstrained
[٥] Weighted
[٦] Single Large Object Placement Problem
[۷] Homogeneous

[8] Dispersion Index