Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 54(2) (2022) 85-88
DOI: 10.22060/mej.2022.20085.7162

Propagation of Thermomechanical Waves in Annular Disks Made of Functionally Graded Materials under Thermal Shock

M. Roghani[1], H. Rouhi [2]

[1]Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran
[2]Department of Technology and Engineering, East of Guilan, University of Guilan, Rudsar-Vajargah, Iran

ABSTRACT: In this paper, using the coupled Lord-Shulman generalized thermoelasticity theory and considering the nonlinear thermal effects, the thermoelastic behavior of annular disks made of functionally graded materials under internal thermal shock is investigated. To this end, the governing equations of the problem are first derived within the framework of the polar coordinates system. It should be noted that the energy equation is kept in its original nonlinear form in this derivation process. The solution procedure is then presented based on the generalized differential quadrature method. In the numerical results, the effects of important parameters such as functionally graded index and magnitude of applied thermal shock on the propagation of thermomechanical waves in the disks are studied. The results show that with increasing the functionally graded index, displacement and stress decrease as time evolves. Also, with presenting results for various magnitudes of thermal shock it is shown that conducting a nonlinear thermal analysis is necessary when the thermal shock magnitude is considerable. In addition, it is revealed that the fluctuations in the temperature are reduced as the relaxation time decreases. Moreover, increasing this parameter leads to temperature variations, whereas the frequency of the system decreases.

Review History:

Received: May, 23, 2021
Revised: Jul. 20, 2021
Accepted: Dec. 20, 2021
Available Online: Jan. 12, 2022

Keywords:

Functionally graded material, Generalized differential quadrature method, Annular disk, Generalized thermoelasticity, Thermal shock.

1- Introduction

Engineering structures are under thermal shock in various applications for which the analysis of thermomechanical phenomena is of great importance. Using the Fourier heat conduction law may lead to incorrect results when a solid is subjected to thermal shock. This is because temperature and temperature gradient are high, while the time period of operation is on the order of picosecond. Hence, the Fourier law fails to correctly capture heat wave propagation phenomena, and the speed of thermal wave propagation becomes infinite which is physically incorrect. Accordingly, some generalized thermoelasticity theories have been proposed. The thermoelasticity developed by Lord and Shulman [1] is the first and simplest theory in this area which is known as the L–S theory. According to this theory, the wavy motion of temperature is captured by inserting a simple relaxation time into the conventional Fourier law. A literature survey shows that there are numerous works on the thermoelastic analysis of various structures using the L-S theory (e.g. [2-4]). In the present paper, an efficient numerical approach is proposed for the nonlinear generalized thermoelasticity problem of annular disks made of Functionally Graded Materials (FGMs) under thermal shock. The governing equations in polar coordinates are first derived based on the L-S theory considering nonlinear thermal effects. A numerical solution approach is then developed based on the GDQ technique. Effects of important parameters including Functionally Graded (FG) gradient index and thermal shock on the coupled thermomechanical response of disks are investigated.

2- Methodology

In the absence of body forces and considering axisymmetric displacements, the radial equation of motion is written as

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho \ddot{u} \tag{1}$$

The governing equations of motion are expressed as

$$\begin{aligned} &\left(\bar{\lambda} + 2\mu\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) + \\ &\frac{\partial\left(\bar{\lambda} + 2\mu\right)}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial r} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &-\left(\bar{\beta}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial r}\right)\left(T - T_0\right) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

*Corresponding author's email: h_rouhi@guilan.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

$$K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial K}{\partial r}-$$
$$\bar{\beta}T\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial r}+\frac{\dot{u}}{r}\right)-t_0\bar{\beta}\dot{T}\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial r}+\frac{\dot{u}}{r}\right)- \tag{3}$$
$$t_0\bar{\beta}T\left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial r}+\frac{\ddot{u}}{r}\right)-c\rho\dot{T}-t_0c\rho\ddot{T}=0$$

The dimensionless form of thermomechanical governing equations is then expressed as

$$\frac{\bar{\lambda}+2\mu}{\bar{\lambda}_m+2\mu_m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)+$$
$$\frac{1}{\bar{\lambda}_m+2\mu_m}\frac{\partial\left(\bar{\lambda}+2\mu\right)}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\bar{\lambda}_m+2\mu_m}\frac{u}{r}\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial r}-$$
$$\frac{\rho}{\rho_m}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{\bar{\beta}_m}\left(\bar{\beta}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial r}\right)\theta=0$$
$$\frac{k}{k_m}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{k_m}\frac{\partial\theta}{\partial r}\frac{\partial k}{\partial r}-\frac{\beta}{\bar{\beta}_m}\hat{C}\left(\theta+1\right) \tag{4}$$
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial r}+\frac{\partial u}{r\partial t}+t_0\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial r}+t_0\frac{\partial^2 u}{r\partial t^2}\right)$$
$$-\frac{\bar{\beta}}{\bar{\beta}_m}\hat{C}t_0\frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial r}+\frac{\partial u}{r\partial t}\right)-$$
$$\frac{\rho c}{\rho_m c_m}\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{\rho c}{\rho_m c_m}t_0\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0$$

Using the Generalized Differential Quadrature (GDQ) technique, the discretized equations can be represented in the following matrix form

$$\begin{bmatrix} M^{uu} & M^{u\theta} \\ M^{\theta u} & M^{\theta\theta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}\\ \ddot{\theta}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} C^{uu} & C^{u\theta} \\ C^{\theta u} & C^{\theta\theta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{u}\\ \dot{\theta}\end{Bmatrix}+ \tag{5}$$
$$\begin{bmatrix} K^{uu} & K^{u\theta} \\ K^{\theta u} & K^{\theta\theta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ \theta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F^{u}\\ F^{\theta}\end{Bmatrix}$$

Boundary conditions are also given by

$$r=a: u=0,\quad -\frac{\partial T}{\partial r}=q_{in}$$
$$r=b: \sigma_{rr}=0,\quad T=T_0 \tag{6}$$

The boundary conditions are directly imposed on Eq. (5), and then, equations of motion and energy are written as

$$M\left(X\right)\ddot{X}+C\left(X,\dot{X}\right)\dot{X}+KX=F \tag{7}$$

The Newmark direct integration scheme and the Picard iterative technique are finally used to find the solution to the problem.

3- Results and Discussion

Fig. 1 indicates the temporal evolution of radial displacement, temperature, hoop, and radial stresses at the middle of a disk subjected to thermal shock. The dimensionless thermal shock, non-dimensional relaxation time, and the coupling parameter are taken as 3, 0.64, and 0.0082594, respectively. Moreover, for the validation purpose with the results given in [4], the FG index is taken as zero. It is observed that the results are in good agreement with those reported in [4]. Also, this figure shows the wavy motion of temperature history which is owing to using the L-S theory.

The influence of the FG index on the displacement history, temperature and stresses waves of the disk are highlighted in Fig. 2. Three values are considered for the FG index including 0.0, 0.2, and 0.5. It is seen that the amplitude of displacement and stresses decreases by the evolution of time as the FG index gets larger

4- Conclusions

The main conclusions of the paper can be summarized as:

The amplitude of displacement and stresses decreases considerably and the frequency of oscillations increases when the FG index gets larger.

With the decrease of relaxation time, the fluctuations of temperature decrease.

An increase of thermal shock magnitude leads to an increase in displacement amplitude and stresses. However, it does not affect the frequency of oscillations.

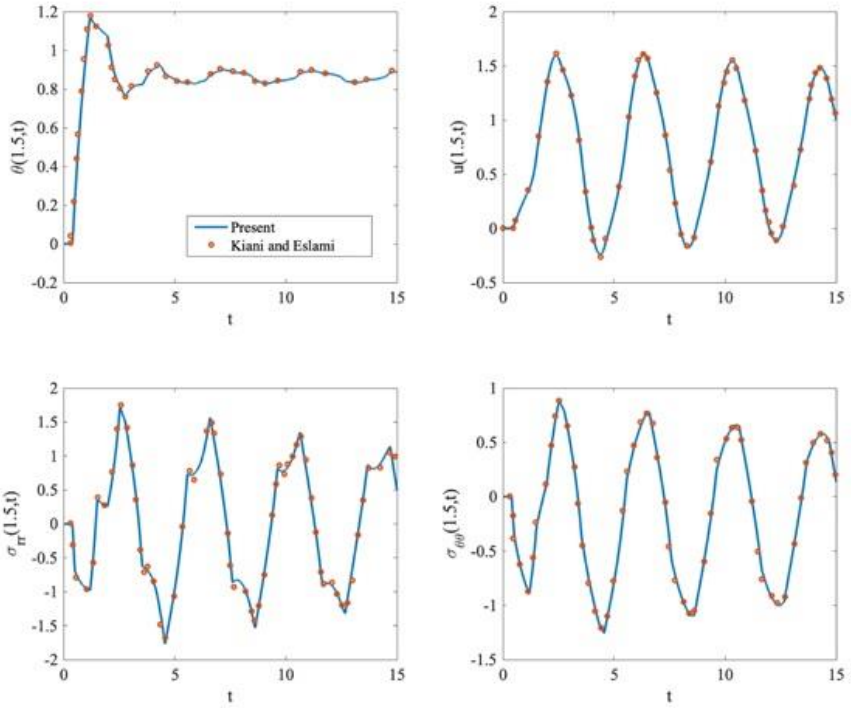


Fig. 1. Temporal evolution of radial displacement, temperature, hoop, and radial stresses at the middle of a homogenous disk

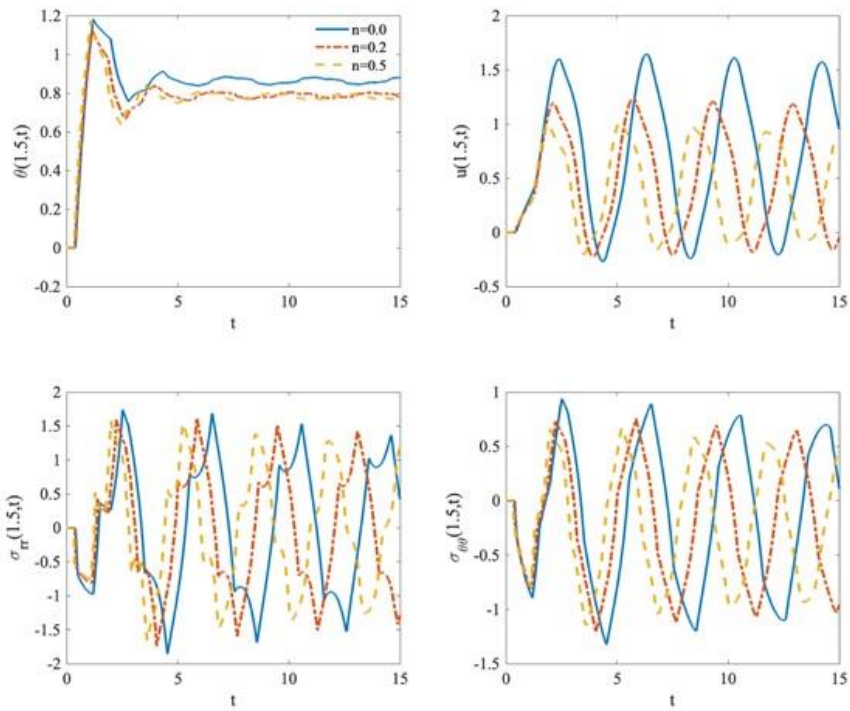


Fig. 2. Temporal evolution of radial displacement, temperature, hoop, and radial stresses at the middle of an FG disk for various FG indexes

References

[1] H.W. Lord, Y. Shulman, A generalized dynamical theory of thermoelasticity, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 15(5) (1967) 299-309.

[2] M.F. Oskouie, R. Ansari, H. Rouhi, Studying nonlinear thermomechanical wave propagation in a viscoelastic layer based upon the Lord-Shulman theory, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 27(10) (2020) 800-806.

[3] M. Faraji Oskouie, R. Ansari, H. Rouhi, Thermally nonlinear generalized coupled thermo-viscoelasticity of disks: a numerical variational approach, Waves in Random and Complex Media, (2020) 1-16.

[4] Y. Kiani, M.R. Eslami, A GDQ approach to thermally nonlinear generalized thermoelasticity of disks, Journal of Thermal Stresses, 40(1) (2017) 121-133.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Roghani, H. Rouhi , Propagation of Thermomechanical Waves in Annular Disks Made of Functionally Graded Materials under Thermal Shock , Amirkabir J. Mech Eng., 54(2) (2022) 85-88.

DOI: 10.22060/mej.2022.20085.7162

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۴، شماره ۲، سال ۱۴۰۱، صفحات ۴۳۳ تا ۴۵۰
DOI: 10.22060/mej.2022.20085.7162

انتشار امواج ترمومکانیکی در دیسک‌های حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت شوک حرارتی

مهران روغنی[۱]، حسام روحی[۲]

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران
۲- دانشکده فنی و مهندسی شرق گیلان، دانشگاه گیلان، رودسر-واجارگاه، ایران

خلاصه: در این مقاله، به کمک تئوری کوپل ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته لُرد-شولمن و با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی حرارتی، رفتار ترموالاستیک دیسک‌های حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت شوک حرارتی داخلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور، ابتدا معادلات حاکم بر مسأله در چارچوب دستگاه مختصات قطبی استخراج می‌شوند. لازم به ذکر است که برای استخراج معادلات حاکم، معادله انرژی در فرم اصلی غیرخطی خود در نظر گرفته خواهد شد. سپس، فرایند حل عددی مسأله به کمک روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته ارائه خواهد شد. در بخش نتایج، اثرات پارامترهای مهمی نظیر اندیس ماده مدرج تابعی و بزرگی شوک حرارتی اعمالی بر انتشار موج ترمومکانیکی در دیسک مورد مطالعه قرار می‌گیرند. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش اندیس ماده مدرج تابعی، بزرگی جابجایی و تنش‌ها در گذر زمان کاهش می‌یابند. همچنین، با ارائه نتایج برای مقادیر مختلف بزرگی شوک حرارتی معلوم گردید در مقادیر بالای شوک حرارتی انجام یک تحلیل غیرخطی حرارتی ضروری است. علاوه بر این آشکار شد که با کاهش زمان آسایش، نوسانات دما کاهش می‌یابد و با افزایش این پارامتر، دامنه تغییرات دما افزایش می‌یابد، در حالی‌که فرکانس نوسانات کاهش می‌یابد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۰۲
بازنگری: ۱۴۰۰/۰۴/۲۹
پذیرش: ۱۴۰۰/۰۹/۲۹
ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۱۰/۲۲

کلمات کلیدی:
ماده مدرج تابعی
روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته
دیسک حلقوی
ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته
شوک حرارتی

۱- مقدمه

در بسیاری از موارد، سازه‌های مهندسی مورد استفاده در کاربردهای مختلف تحت شوک حرارتی قرار می‌گیرند، و در این‌گونه موارد تحلیل پدیده‌های ترمومکانیکی سازه از اهمیت بسزائی برخوردار است. به عنوان نمونه در این زمینه می‌توان به تحلیل انتشار امواج ترمومکانیکی در لیزرهای فوق سریع در اثر تغییر سریع درجه حرارت اشاره کرد. با توجه به اهمیت مذکور، تعداد زیادی از محققین به حل مسائل مختلف ترموالاستیسیته در سازه‌های گوناگون از قبیل لایه‌ها، استوانه‌ها، دیسک‌ها و کره‌ها پرداخته‌اند [۱-۳].

برای تحلیل نظری ترموالاستیک اجسام جامد، تئوری‌های ترموالاستیسیته مختلفی وجود دارند [۲]. در مواردی که جسم در معرض شوک حرارتی قرار می‌گیرد، استفاده از قانون هدایت حرارتی فوریه منجر به نتایج نادرستی خواهد شد. توضیح آن‌که در چنین مواردی، دما و گرادیان آن بالا هستند؛ در حالی‌که مدت زمان عملکرد بسیار پایین و در حد پیکوثانیه می‌باشد. در نتیجه قانون مذکور قادر به در نظر گرفتن دقیق پدیده‌های انتشار موج نخواهد بود، چرا که سرعت انتشار موج حرارتی بینهایت می‌شود. در نتیجه، برای تحلیل ترموالاستیک اجسام تحت شوک حرارتی، نظریه‌های ترموالاستیسته غیرکلاسیک و تعمیم‌یافته‌ای پیشنهاد شده‌اند [۴-۵]. از میان این تئوری‌ها می‌توان به تئوری‌های لُرد-شولمن [۶]، گرین-لیندسی [۷] و گرین-نَقدی [۸ و ۹] اشاره کرد. در تئوری ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته لرد-شولمن، زمان آسایشی داخل قانون فوریه به منظور لحاظ کردن حرکت موجوار دما وارد می‌شود. در حقیقت، هم شار گرما و هم مشتق زمانی آن در معادله هذلولوی هدایت حرارتی بر اساس این تئوری در نظر گرفته می‌شوند. به علت سادگی و کارا بودن، محققین بسیاری از تئوری لرد-شولمن در کارهای خود استفاده کرده‌اند که در ادامه به برخی از جدیدترین و مهمترین تحقیقات مربوطه اشاره خواهد شد.

کریمی زوردجانی و کیانی [۱۰] پاسخ یک کره توخالی ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت شوک حرارتی را بر اساس تئوری لرد-شولمن مورد بررسی قرار دادند. در فرمولبندی کار آن‌ها اثرات غیرخطی حرارتی در نظر گرفته شد. همچنین، برهمکنش، انتشار و انعکاس امواج مورد تحلیل و بررسی قرار گرفتند. حیدرپور و همکاران [۱۱] رفتار ترموالاستیک گذرای

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h_rouhi@guilan.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

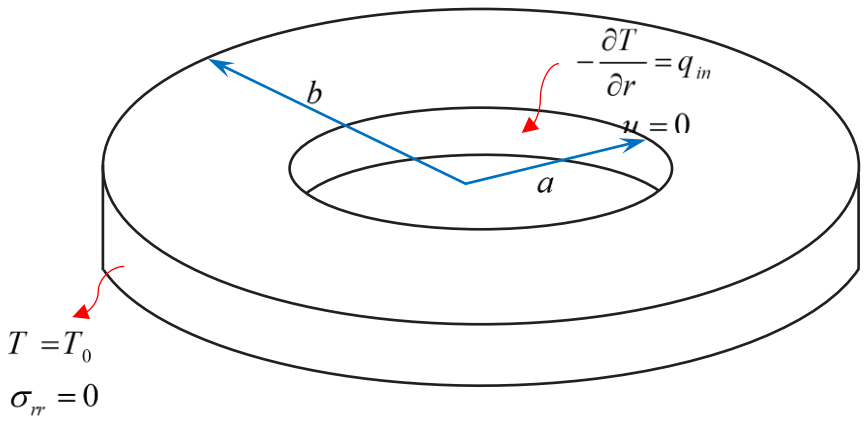
پوسته‌های کروی ساخته شده از کامپوزیت‌های تقویت شده با نانوتراشه‌های گرافنی تحت بارگذاری ترمومکانیکی را به وسیله تئوری لرد–شولمن مورد مطالعه قرار دادند. فرایند حل پیشنهادی آن‌ها بر اساس روش تربیع دیفرانسیلی، تبدیل لاپلاس و تکنیک انتگرالگیری زمانی چند مرحله‌ای بی اسپلاین منطقی غیریکنواخت بود. آی و همکاران [۱۲] به کمک مدل زمان آسایش لرد و شولمن، رفتار ترمومکانیکی مواد چندلایه را مورد بررسی قرار دادند. بدین منظور، روش تحلیلی لایه–المان برای به دست آوردن حل‌های گذرای جابجایی، تنش و دما در ماده چندلایه به خدمت گرفته شد. نتایج این کار نشان می‌دهد که برای مواد چندلایه، لایه‌های دارای هدایت حرارتی بالا نزدیک به منبع حرارتی منجر به ضعیف شدن پاسخ‌های حرارتی خواهند شد. فرجی اسکوئی و همکاران [۱۳] انتشار موج در یک لایه ویسکوالاستیک را بصورت عددی مورد مطالعه قرار دادند. برای نیل به این هدف، از تئوری ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته لرد–شولمن استفاده شد. همچنین، برای قسمت ویسکوالاستیک کار از مدل کِلوین–وُیت بهره گرفته شد. در یک تحقیق دیگر [۱۴] این نویسندگان مسأله مشابهی را برای دیسک‌های ساخته شده از مواد ویسکوالاستیک حل کردند. بگری و اسلامی [۱۵] بر اساس تئوری لرد–شولمن یک مدل ترموالاستیسته تعمیم‌یافته یکبُعدی برای دیسک‌های تحت شوک حرارتی توسعه دادند. روش حل این کار مبتنی بر رهیافت اجزای محدود گلرکین می‌باشد. همچنین، بگری و اسلامی ترموالاستیسیته کوپل تعمیم‌یافته دیسک‌های حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی را در مرجع [۱۶] بر طبق تئوری لرد–شولمن ارائه دادند. کیانی و اسلامی [۱۷] استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته را برای حل مسأله ترموالاستیسته لرد–شولمن دیسک‌ها پیشنهاد کردند. بهتویی و اسلامی [۱۸] پاسخ کوپل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت ضربه حرارتی را مورد تحقیق و بررسی قرار دادند. در مقاله مذکور، اثرات تغییر شکل برشی با استفاده از یک تئوری مرتبه دوم در نظر گرفته شد. شرعیات [۱۹] برای سیلندرهای ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی و تحت شوک‌های حرارتی گوناگون، تحلیل‌های ترموالاستیسته غیرخطی تعمیم‌یافته و کلاسیک ارائه داد. بدین منظور از المان‌های هرمیتی استفاده شد و وابستگی خواص مواد به دما نیز لحاظ گردید.

مواد مدرج تابعی[1] دسته‌ای از مواد کامپوزیتی هستند که نخستین بار در در دهه هشتاد میلادی به عنوان موادی پیشرفته برای مقاصد گوناگون معرفی شدند. بر خلاف مواد کامپوزیتی لایه‌ای کلاسیک که در آن‌ها خواص نسبت به موقعیت به‌طور چشمگیری تغییر می‌کنند، خواص مواد مدرج تابعی به تدریج در یک راستای مشخص دچار تغییر می‌شوند. این ویژگی سبب کاهش احتمال بروز تمرکزهای تنش و ترک در ماده خواهد شد. بنا به این دلایل، مواد مدرج تابعی دارای کاربردهای متنوعی در صنایع مختلف هستند. این دسته از مواد کامپوزیتی به منظور داشتن خواص ترمومکانیکی مطلوب از ترکیب دو و یا چند ماده ساخته می‌شوند. اکثراً، دو ماده تشکیل‌دهنده مواد مدرج تابعی سرامیک‌ها (با هدایت حرارتی پایین به منظور ایجاد مقاومت حرارتی بالا) و فلزات (برای جلوگیری از شکست سازه) هستند. به علت محاسن مذکور، مواد مدرج تابعی به عنوان یک مقاوم حرارتی عالی در سازه‌های مکانیکی شناخته می‌شوند و قادر به تحمل شرایط بارگذاری حرارتی سخت (به عنوان مثال در کاربردهای هوافضایی) هستند.

تاکنون تحقیقات متعددی بر روی رفتار سازه‌های مختلف مهندسی ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی صورت گرفته است. به عنوان نمونه، رحیمی و همکاران [۲۰] به کمک یک رهیافت انرژی، رفتار ترموالاستیک سیلندرهای دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی پیزوالکتریک، که بعنوان حسگر کاربرد دارند، را مورد بررسی قرار دادند. بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، عارفی و رحیمی [۲۱] رفتار ترموالاستیک سیلندرهای تحت فشار ساخته شده از مواد مدرج تابعی را با در نظر گرفتن بارهای مکانیکی و حرارتی مورد تحلیل قرار دادند. نتایج کار آن‌ها نشان داد که در حضور همزمان دما و فشار، جابجایی محوری سیلندر با افزایش ضریب ناهمگنی کاهش می‌یابد. عارفی و همکاران [۲۲] تحلیل دوبعدی ترموالاستیک سیلندرهای جدارضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی را با در نظر گرفتن اثر بستر الاستیک از نوع مدل پاسترناک را ارائه کردند. در این پژوهش آشکار گردید که کاهش ضریب ناهمگنی ماده مدرج تابعی تأثیری افزایشی بر جابجایی شعاعی سیلندر دارد. همچنین لقمان و همکاران [۲۳] تحلیل ترموالاستیک نامتقارنی برای پوسته‌های استوانه‌ای دارای طول نامحدود و ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت میدان مغناطیسی طولی ارائه دادند. بر اساس نتایج ایشان، با افزایش ضریب ناهمگنی، جابجایی شعاعی افزایش می‌یابد در حالیکه جابجایی محیطی کاسته می‌شود.

در مقاله حاضر، یک رهیافت عددی و کارا برای حل مسأله ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته غیرخطی دیسک‌های حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت شوک حرارتی ارائه می‌شود. ابتدا معادلات حاکم بر اساس تئوری لرد–شولمن در مختصات قطبی استخراج می‌شوند. در این فرایند استخراج، اثرات

1 Functionally Graded Materials (FGMs)



شکل ۱. شماتیک دیسک حلقوی تحت شوک حرارتی داخلی

Fig. 1. Schematic of annular disk under internal thermal shock

غیرخطی حرارتی لحاظ می‌گردند و معادله انرژی در فرم اصلی خود نوشته می‌شود. سپس، به کمک روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته، رهیافتی عددی برای فرایند حل پیشنهاد خواهد شد. در نهایت، اثرات پارامترهای تأثیرگذار شامل اندیس گرادیان ماده و اندازه شوک حرارتی بر پاسخ ترمومکانیکی کوپل دیسک مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.

۲- خواص مواد

مطابق شکل ۱ دیسکی حلقوی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b در نظر بگیرید. بارگذاری مورد نظر شوکی حرارتی است که به سطح داخلی دیسک اعمال می‌شود. همچنین، فرض می‌شود ماده سازنده دیسک ترکیبی از فلز و سرامیک به شکل مدرج تابعی باشد و خاصیت ماده در جهت شعاعی به صورت زیر تغییر می‌کند

$$P(r)=V_m(r)P_m+V_c(r)P_c \qquad (۱)$$

که در آن زیرنویس‌های m و c به ترتیب مواد تشکیل دهنده فلزی و سرامیکی را نشان می‌دهند. علاوه بر این، V_m و V_c کسر حجمی مواد فلزی و سرامیکی هستند که به صورت زیر بدست می‌آیند

$$V_m=\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^n, V_c=1-V_m \qquad (۲)$$

که در آن n نشانگر فاکتور ناهمگنی ماده است. با ترکیب معادلات (۱) و (۲) و مشتق گیری در جهت r می‌توان مشتق خصوصیات مواد را به شرح زیر بدست آورد

$$\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{n\left(\frac{a-r}{a-b}\right)^n}{a-r}(P_c-P_m) \qquad (۳)$$

۳- معادلات حرکت

در غیاب نیروهای داخلی و با توجه به جابجایی‌های متقارن محوری، معادله شعاعی حرکت به صورت زیر نوشته می‌شود [۲]

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=\rho\ddot{u} \qquad (۴)$$

که در آن u، σ_{rr} و $\sigma_{\theta\theta}$ به ترتیب جابجایی شعاعی، تنش‌های شعاعی و محیطی را نشان می‌دهند. در مورد جسم ترمو الاستیک همگن همسانگرد، روابط ساختاری به صورت زیر بیان می‌شود [۱۵]

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}&=2\mu\varepsilon_{rr}+\bar{\lambda}(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta})-\bar{\beta}(T-T_0)\\ \sigma_{\theta\theta}&=2\mu\varepsilon_{rr}+\bar{\lambda}(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta})-\bar{\beta}(T-T_0)\end{aligned} \qquad (۵)$$

که در آن‌ها T و T_0 نشانگر دمای مطلق و دمای مرجع هستند. همچنین، $\bar{\lambda}$ و $\bar{\beta}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\bar{\lambda}=\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\lambda,\ \ \bar{\beta}=\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\beta \tag{۶}$$

در معادله (۶)، μ و λ ثوابت لامه[1] را نشان می‌دهند. در ادامه، β پارامتر ترموالاستیک است که به صورت $\beta=(۳\lambda+۲\mu)\alpha$ تعریف شده است. اجزای کرنش نیز به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شوند

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r},\ \ \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u}{r} \tag{۷}$$

با قرار دادن معادلات (۵) و (۷) در معادله (۳)، معادله حرکت به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned}&(\bar{\lambda}+2\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)+\frac{\partial(\bar{\lambda}+2\mu)}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}+\\&\frac{u}{r}\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial r}-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\bar{\beta}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial r}\right)(T-T_0)=0\end{aligned} \tag{۸}$$

۴- معادلات انرژی

بر اساس تئوری لرد-شولمن، تغییر موجی دما از طریق قرار دادن یک پارامتر زمان آسایش، t_0، در قانون مرسوم فوریه به شرح زیر مدل می‌شود [۲]

$$q+t_0\dot{q}=-K\frac{\partial T}{\partial r} \tag{۹}$$

که در آن q و K به ترتیب شار گرما و رسانایی گرمایی را نشان می‌دهند. تعادل گرما برای یک عنصر از جسم مورد بررسی به صورت زیر بیان می‌شود [۲۴]

$$\dot{Q}=-\frac{1}{r}\frac{\partial(rq)}{\partial r} \tag{۱۰}$$

که در آن Q شار حرارتی خاص است. قانون دوم ترمودینامیک توسط فرمول زیر داده می‌شود

$$\delta Q=Tds \tag{۱۱}$$

فرم نرخی معادله (۱۱) به شکل زیر است

$$\dot{Q}=T\dot{S}=T\left(\frac{\partial S}{\partial\varepsilon_{rr}}\dot{\varepsilon}_{rr}+\frac{\partial S}{\partial\varepsilon_{\theta\theta}}\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}+\frac{\partial S}{\partial T}\dot{T}\right) \tag{۱۲}$$

یا به شکل دیگر

$$\dot{Q}=T\bar{\beta}\dot{\varepsilon}_{rr}+T\bar{\beta}\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}+c\rho\dot{T} \tag{۱۳}$$

به منظور بدست آوردن قانون اول ترمودینامیک برای تغییر حرارتی غیرخطی در دیسک طبق تئوری لرد-شولمن، معادلات (۹)، (۱۰) و (۱۳) استفاده می‌شوند. با قرار دادن میدان کرنش در معادله بدست آمده می‌توان به معادله زیر رسید

$$\begin{aligned}&K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial K}{\partial r}-\bar{\beta}T\left(\frac{\partial\dot{u}}{\partial r}+\frac{\dot{u}}{r}\right)-\\&t_0\bar{\beta}\dot{T}\left(\frac{\partial\dot{u}}{\partial r}+\frac{\dot{u}}{r}\right)-t_0\bar{\beta}T\left(\frac{\partial\ddot{u}}{\partial r}+\frac{\ddot{u}}{r}\right)-c\rho\dot{T}-t_0c\rho\ddot{T}=0\end{aligned} \tag{۱۴}$$

۵- بی‌بُعد سازی معادلات حاکم

در این‌جا، معادلات در فرم بدون بعد ارائه می‌شوند. به همین منظور، متغیرهای بدون بعد زیر معرفی می‌شوند

1 Lamé constants

$$\hat{q}_i = \frac{l_m}{k_m T_0} q_i \quad \hat{u}_i = \frac{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m}{l_m \bar{\beta}_m T_0} u_i$$
$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0} \quad \hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\bar{\beta}_m T_0} \quad \hat{r} = \frac{r}{l_m} \quad \hat{t} = \frac{c_{1m}}{l_m} t \tag{۱۵}$$

که در آن $l_m = K_m \left(\rho_m c_m c_{1m}\right)^{-1}$ طول مشخصه است، c_{1m} سرعت انتشار موج الاستیک را نشان می‌دهد؛ $c_{1m} = \sqrt{\left(\bar{\lambda}_m + 2\mu_m\right)\rho_m^{-1}}$. با استفاده از روابط فوق، فرم بدون بعد معادلات (۸) و (۱۴) به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\frac{\bar{\lambda} + 2\mu}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) + \frac{1}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m}\frac{\partial\left(\bar{\lambda} + 2\mu\right)}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r} + \tag{۱۶}$$
$$\frac{1}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m}\frac{u}{r}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial r} - \frac{\rho}{\rho_m}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\bar{\beta}_m}\left(\bar{\beta}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial r}\right)\theta = 0$$
$$\frac{k}{k_m}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{k_m}\frac{\partial \theta}{\partial r}\frac{\partial k}{\partial r} - \frac{\beta}{\bar{\beta}_m}\hat{C}\left(\theta + 1\right)$$
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} + \frac{\partial u}{r \partial t} + t_0 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial r} + t_0 \frac{\partial^2 u}{r \partial t^2}\right) - \frac{\bar{\beta}}{\bar{\beta}_m}\hat{C} t_0 \frac{\partial \theta}{\partial t}$$
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} + \frac{\partial u}{r \partial t}\right) - \frac{\rho c}{\rho_m c_m}\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\rho c}{\rho_m c_m} t_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

توجه شود که نماد $\hat{}$ در این معادلات برای ساده‌سازی حذف شده است. همچنین $\hat{C}$ مربوط به اثر کوپل به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\hat{C} = \frac{T_0 \bar{\beta}_m^2}{\rho_m c_m \left(\bar{\lambda}_m + 2\mu_m\right)} \tag{۱۷}$$

علاوه بر این ، تنش‌های شعاعی و محیطی به شکل بی‌بعد به صورت زیر بیان می‌شوند

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) - \frac{\bar{\beta}}{\beta_m}\theta$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2\mu}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m}\frac{u}{r} + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) - \frac{\bar{\beta}}{\beta_m}\theta \tag{۱۸}$$

۶- رویکرد حل عددی

با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته [۲۵]، معادله (۱۶) به شکل زیر گسسته‌سازی می‌شود

$$\frac{\bar{\lambda}_i + 2\mu_i}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m}\sum_{j=1}^{N}\left(C_{ij}^{(2)} + \frac{1}{r_i}C_{ij}^{(1)} - \frac{1}{r^2}C_{ij}^{(0)}\right)u_j + \tag{۱۹}$$
$$\frac{1}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m}\frac{\partial\left(\bar{\lambda}_i + 2\mu_i\right)}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(1)}u_j +$$
$$\frac{1}{\bar{\lambda}_m + 2\mu_m}\frac{1}{r_i}\frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(0)}u_j - \frac{\rho_i}{\rho_m}\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(0)}\ddot{u}_j -$$
$$\frac{\bar{\beta}_i}{\bar{\beta}_m}\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(1)}\theta_j - \frac{1}{\bar{\beta}_m}\frac{\partial \bar{\beta}_i}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(0)}\theta_j = 0$$
$$\frac{k_i}{k_m}\sum_{j=1}^{N}\left(C_{ij}^{(2)} + \frac{1}{r_i}C_{ij}^{(1)}\right)\theta_j + \frac{1}{k_m}\frac{\partial k_i}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(1)}\theta_j$$
$$-\frac{\rho_i c_i}{\rho_m c_m}\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(0)}\dot{\theta}_j - \frac{\rho_i c_i}{\rho_m c_m}t_0\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(0)}\ddot{\theta}_j$$
$$-\frac{\bar{\beta}_i}{\bar{\beta}_m}\hat{C}t_0\left(\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(0)}\dot{\theta}_j\right)\sum_{j=1}^{N}\left(C_{ij}^{(1)} + \frac{1}{r_i}C_{ij}^{(0)}\right)\dot{u}_j$$
$$-\frac{\bar{\beta}_i}{\bar{\beta}_m}\hat{C}\left(1 + \sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(0)}\theta_j\right)\left(\sum_{j=1}^{N}\left(C_{ij}^{(1)} + \frac{1}{r_i}C_{ij}^{(0)}\right)\dot{u}_j + \right.$$
$$\left. t_0\sum_{j=1}^{N}\left(C_{ij}^{(1)} + \frac{1}{r_i}C_{ij}^{(0)}\right)\ddot{u}_j\right) = 0$$

معادله بالا را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} M^{uu} & M^{u\theta} \\ M^{\theta u} & M^{\theta\theta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C^{uu} & C^{u\theta} \\ C^{\theta u} & C^{\theta\theta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K^{uu} & K^{u\theta} \\ K^{\theta u} & K^{\theta\theta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^u \\ F^\theta \end{Bmatrix} \tag{۲۰}$$

که اجزای آن به شکل زیر بدست می‌آیند

$$C_{ij}^{u\theta}=0 \quad C_{ij}^{uu}=0 \quad M_{ij}^{u\theta}=0 \quad M_{ij}^{uu}=\frac{\rho_i}{\rho_m}C_{ij}^{(0)} \tag{۲۱}$$

$$K_{ij}^{uu}=\frac{\bar{\lambda}_i+2\mu_i}{\bar{\lambda}_m+2\mu_m}\left(C_{ij}^{(2)}+\frac{1}{r_i}C_{ij}^{(1)}-\frac{1}{r^2}C_{ij}^{(0)}\right)+$$
$$\frac{1}{\bar{\lambda}_m+2\mu_m}\frac{\partial\left(\bar{\lambda}_i+2\mu_i\right)}{\partial r}C_{ij}^{(1)}++\frac{1}{\bar{\lambda}_m+2\mu_m}\frac{1}{r_i}\frac{\partial\bar{\lambda}_i}{\partial r}C_{ij}^{(0)}$$
$$K_{ij}^{u\theta}=-\frac{\bar{\beta}_i}{\bar{\beta}_m}C_{ij}^{(1)}-\frac{1}{\bar{\beta}_m}\frac{\partial\bar{\beta}_i}{\partial r}C_{ij}^{(0)}$$
$$M_{ij}^{\theta u}=-\frac{\bar{\beta}_i}{\bar{\beta}_m}\hat{C}t_0\left(1+\theta_i\right)\left(C_{ij}^{(1)}+\frac{1}{r_i}C_{ij}^{(0)}\right)$$
$$M_{ij}^{\theta\theta}=-\frac{\rho_i c_i}{\rho_m c_m}t_0C_{ij}^{(0)}$$
$$C_{ij}^{\theta u}=-\frac{\bar{\beta}_i}{\bar{\beta}_m}\hat{C}\left(1+\theta_i+t_0\dot{\theta}_i\right)\left(C_{ij}^{(1)}+\frac{1}{r_i}C_{ij}^{(0)}\right)$$
$$C_{ij}^{\theta\theta}=-\frac{\rho_i c_i}{\rho_m c_m}C_{ij}^{(0)}$$
$$K_{ij}^{\theta u}=0$$
$$K_{ij}^{\theta\theta}=\frac{k_i}{k_m}\left(C_{ij}^{(2)}+\frac{1}{r_i}C_{ij}^{(1)}\right)+\frac{1}{k_m}\frac{\partial k_i}{\partial r}C_{ij}^{(1)}$$
$$F_i^u=0$$
$$F_i^\theta=0$$

فرض می‌شود که دیسک در سطح داخلی تحت شوک حرارتی قرار دارد، در حالی‌که سطح خارجی آن در دمای مرجع نگهداری می‌شود. علاوه بر این، سطح خارجی عاری از تنش شعاعی و سطح داخلی عاری از تغییر شکل شعاعی است (شکل ۱ را ببینید). بنابراین، شرایط مرزی به شکل زیر داده می‌شوند

$$\begin{aligned} &r=a:u=0, \quad -\frac{\partial T}{\partial r}=q_{in} \\ &r=b:\sigma_{rr}=0, \quad T=T_0 \end{aligned} \tag{۲۲}$$

که در آن a و b شعاع داخلی و خارجی دیسک بی‌بعد هستند. شکل گسسته‌سازی شده شرایط مرزی به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} &r=r_1:\sum_{j=1}^{N}C_{1j}^{(0)}u_j=0, \\ &\sum_{j=1}^{N}C_{1j}^{(1)}\theta_j=-q_{in} \\ &r=r_N:\frac{\bar{\lambda}_i+2\mu_i}{\bar{\lambda}_m+2\mu_m}\sum_{j=1}^{N}C_{Nj}^{(1)}\theta_j+ \\ &\frac{\bar{\lambda}_i}{r_N\left(\bar{\lambda}_m+2\mu_m\right)}\sum_{j=1}^{N}C_{Nj}^{(0)}u_j-\frac{\bar{\beta}_i}{\bar{\beta}_m}\sum_{j=1}^{N}C_{Nj}^{(0)}\theta_j=0 \\ &\sum_{j=1}^{N}C_{Nj}^{(0)}\theta_j=0 \end{aligned} \tag{۲۳}$$

شرایط مرزی ارائه شده در معادله (۲۲) مستقیماً در معادله (۲۰) اعمال می‌شوند. پس از آن، معادلات حرکت و انرژی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$M\left(X\right)\ddot{X}+C\left(X,\dot{X}\right)\dot{X}+KX=F \tag{۲۴}$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری مستقیم نیومارک[1] به شکل شتاب ثابت متوسط ($\alpha_N=۰/۵$, $\beta_N=۰/۲۵$) [۲۶] بر روی معادله‌ی (۲۴) به معادله زیر می‌رسیم

$$\hat{K}\left(X\right)X_{j+1}=\hat{F}_{j,j+1} \tag{۲۵}$$

که در آن

$$\begin{aligned} &\hat{K}_{j+1}=K_{j+1}+a_3M_{j+1}+a_6C_{j+1} \\ &\hat{F}_{j,j+1}=F_{j+1}+M_{j+1}\left(a_3X_j+a_4\dot{X}_j+a_5\ddot{X}_j\right) \\ &+C_{j+1}\left(a_6X_j+a_7\dot{X}_j+a_8\ddot{X}_j\right) \end{aligned} \tag{۲۶}$$

و همچنین

$$\begin{aligned} &a_1=\alpha_N\Delta t, \quad a_2=\left(1-\alpha_N\right)\Delta t \\ &a_3=\frac{1}{\beta_N\Delta t^2}, \quad a_4=\frac{1}{\beta_N\Delta t}, \quad a_5=\frac{1-2\beta_N}{2\beta_N} \\ &a_6=\frac{\alpha_N}{\beta_N\Delta t}, \quad a_7=\frac{\alpha_N-\beta_N}{\beta_N}, \quad a_8=\frac{\alpha_N-2\beta_N}{2\beta_N}\Delta t \end{aligned} \tag{۲۷}$$

1 Newmark's direct integration

جدول ۱. خواص مواد مورد استفاده

Table 1. Properties of used materials

ماده	$\alpha[1/\mathbf{K}]$	$E[\mathbf{Pa}]$	$K[\mathbf{W/mK}]$	$\rho[\mathbf{kg/m^3}]$	ν	$C_v[\mathbf{J/kgK}]$
SUS۳۰۴	۱۲/۳۳ ×۱۰$^{-۶}$	۲۰۱/۰۴ × ۱۰^{۹}	۱۵/۳۷۹	۸۱۶۶	۰/۳۲۶۲	۴۹۶/۵۶
$SI_۳N_۴$	۵/۸۷۲۳ ×۱۰$^{-۶}$	۳۴۸۴۳ × ۱۰^{۹}	۱۳/۷۲۳	۲۳۷۰	۰/۲۴	۵۵۵/۱۱

$\dot{X}_{j+1}$ و $\ddot{X}_{j+1}$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\begin{aligned}\ddot{X}_{j+1} &= a_3\left(X_{j+1}-X_j\right)-a_4\dot{X}_j-a_5\ddot{X}_j\\ \dot{X}_{j+1} &= \dot{X}_j+a_2\ddot{X}_j+a_1\ddot{X}_{j+1}\end{aligned} \tag{۲۸}$$

از آنجا که دیسک در حالت استراحت است، مقادیر اولیه X و $\dot{X}$ صفر در نظر گرفته می‌شوند. از این‌رو، شرایط اولیه برای شروع راهپیمایی زمانی به شرح زیر است

$$u(r,0)=\dot{u}(r,0)=\theta(r,0)=\dot{\theta}(r,0)=0 \tag{۲۹}$$

در نهایت، برای حل معادلات جبری غیر خطی حاصل در معادله (۲۵) تکنیک تکرارشونده پیکارد[1] اعمال می‌شود.

۷- نتایج و بحث

در این بخش، نتایج عددی در مورد پاسخ دیسک حلقوی ساخته شده از یک ماده مدرج تابعی به شوک حرارتی داخلی با خواص داده شده در جدول ۱ [۲۷] ارئه شده‌اند.

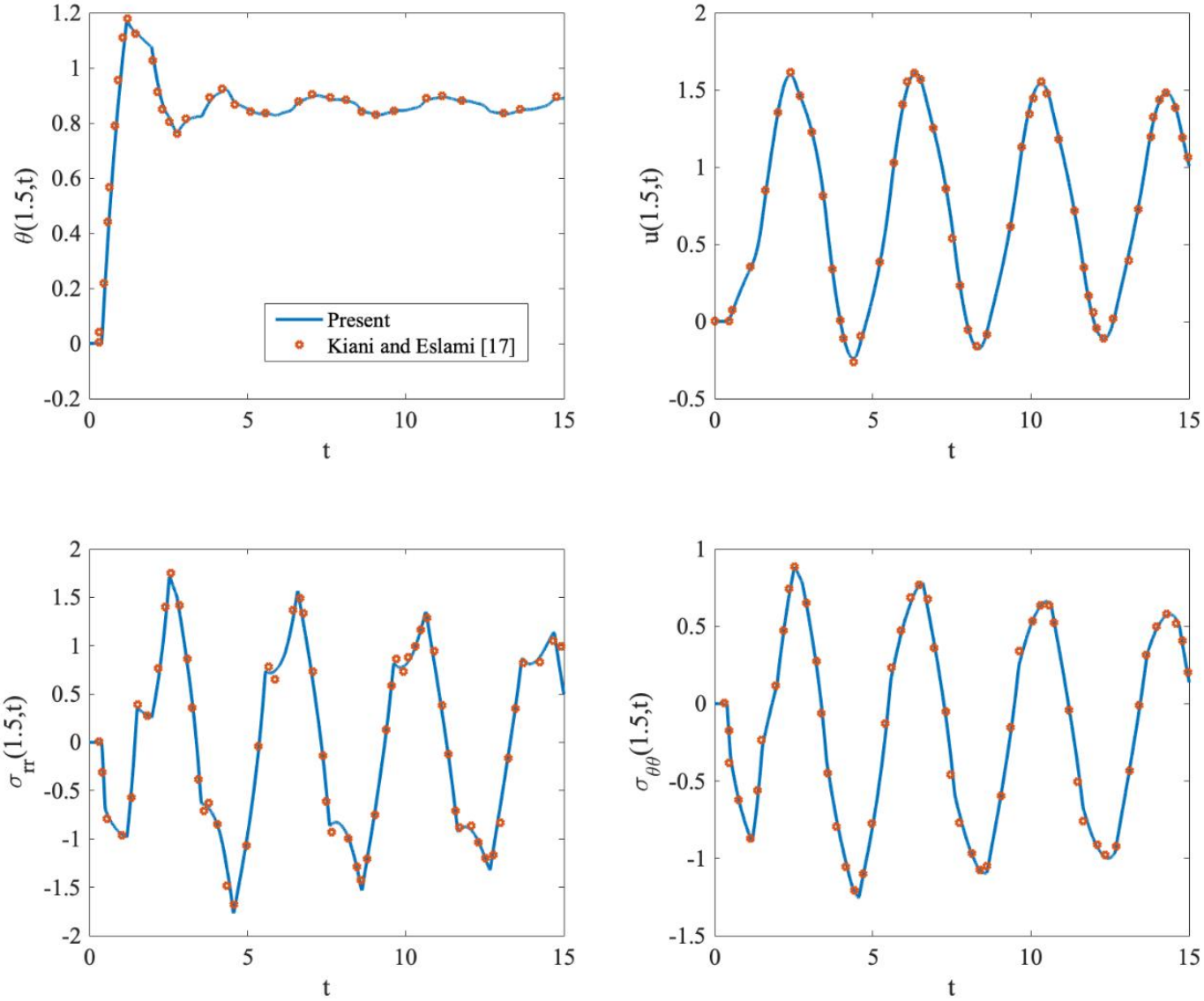
شکل ۲ تکامل زمانی جابجایی شعاعی، دما، و تنش‌های شعاعی و محیطی را در وسط دیسک تحت شوک حرارتی نشان می‌دهد. شوک حرارتی بدون بعد (q_{in})، زمان آسایش بدون بعد ($t_.$) و پارامتر کوپل (C) به ترتیب ۳، ۰/۶۴ و ۰/۰۰۸۲۵۹۴ در نظر گرفته شده‌اند.

همچنین، به منظور اعتبار سنجی با نتایج گزارش شده در مرجع [۱۷]، اندیس ماده مدرج تابعی (n) صفر در نظر گرفته می‌شود. می‌توان مشاهده کرد که نتایج حاضر با نتایج بدست آمده در [۱۷] کاملاً مطابقت دارد. علاوه بر این، این شکل حرکت موجدار دما را نشان می‌دهد که ناشی از استفاده از تئوری کوپل ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته لرد-شولمن است.

تأثیر اندیس ماده مدرج تابعی بر تاریخچه جابجایی، دما و تنش‌های دیسک در شکل ۳ نشان داده شده است. مقادیر اندازه شوک حرارتی، زمان آسایش و پارامتر کوپل با همان مقادیر در نظر گرفته شده در شکل قبلی مساوی است. سه مقدار برای اندیس ماده مدرج تابعی در نظر گرفته شده است که برابر با ۰ ، ۰/۲ و ۰/۵ هستند. مشاهده می‌شود که با بزرگتر شدن اندیس ماده مدرج تابعی، دامنه جابجایی و تنش‌ها به طور محسوسی کاهش می‌یابند و فرکانس نوسانات افزوده می‌شود. علت این امر را می‌توان به کمک معادله (۲) ردیابی کرد که بر اساس آن کسر حجمی بخش سرامیکی با افزایش اندیس ماده مدرج تابعی دچار افزایش می‌شود و به دلیل بالاتر بودن مدول الاستیک سرامیک نسبت به فلز، دیسک سخت‌تر خواهد شد.

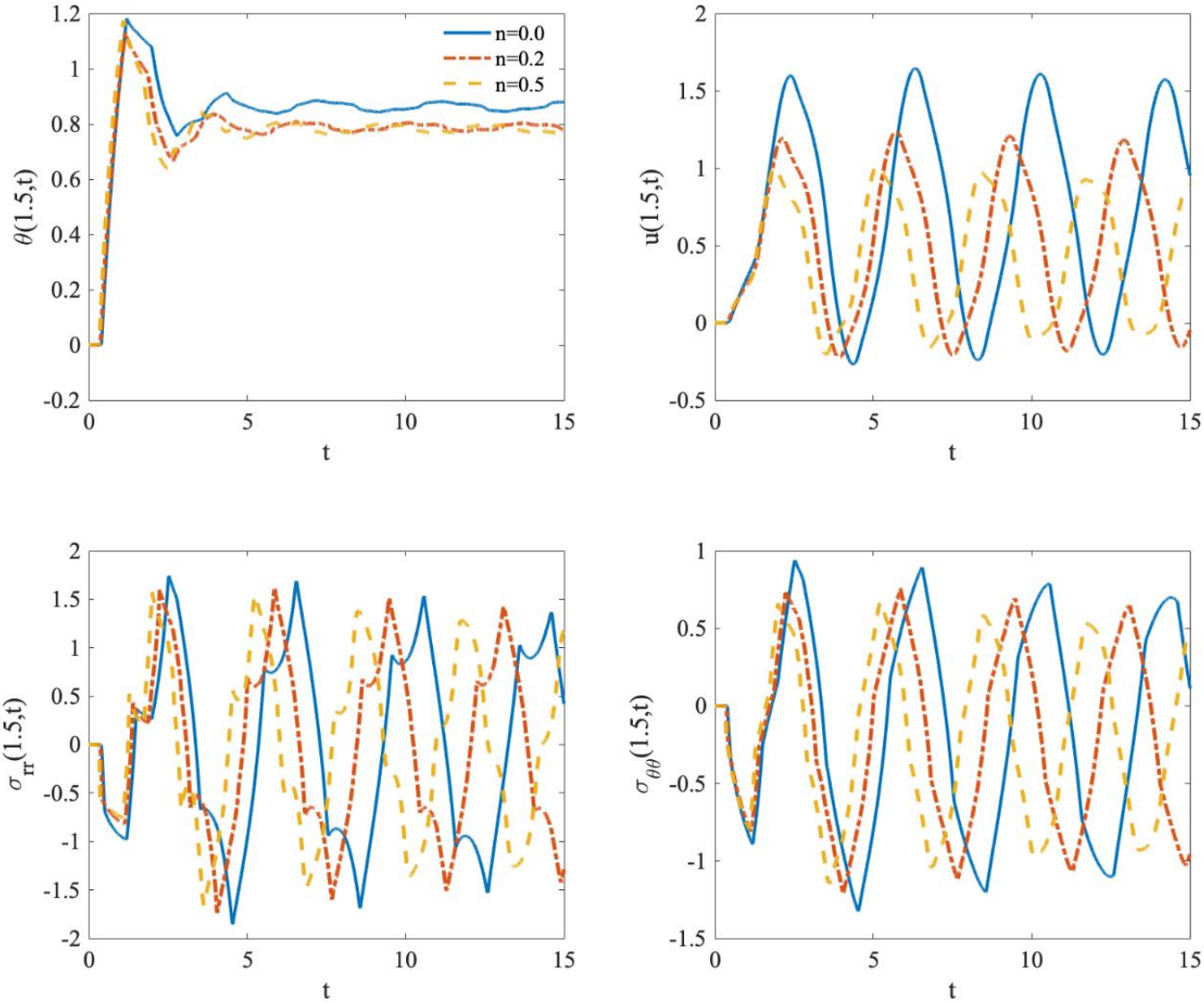
تأثیر شدت شار گرما بر انتشار دما، جابجایی شعاعی، تنش‌های محیطی و شعاعی را می‌توان از روی شکل ۴ تجزیه و تحلیل کرد. در اینجا فرض می‌شود که n = ۰/۵. همانطور که انتظار می‌رفت، دامنه جابجایی، دما و امواج تنش وقتی بزرگتر می‌شوند که شدت شوک حرارتی بیشتر شود. همچنین دیده می‌شود که تغییر شدت شار گرما بر فرکانس نوسانات بی‌تأثیر است. شایان ذکر است که در مقادیر بالای شوک حرارتی، استفاده از تحلیل غیر خطی حرارتی ضروری می‌شود.

1 Picard's iteration



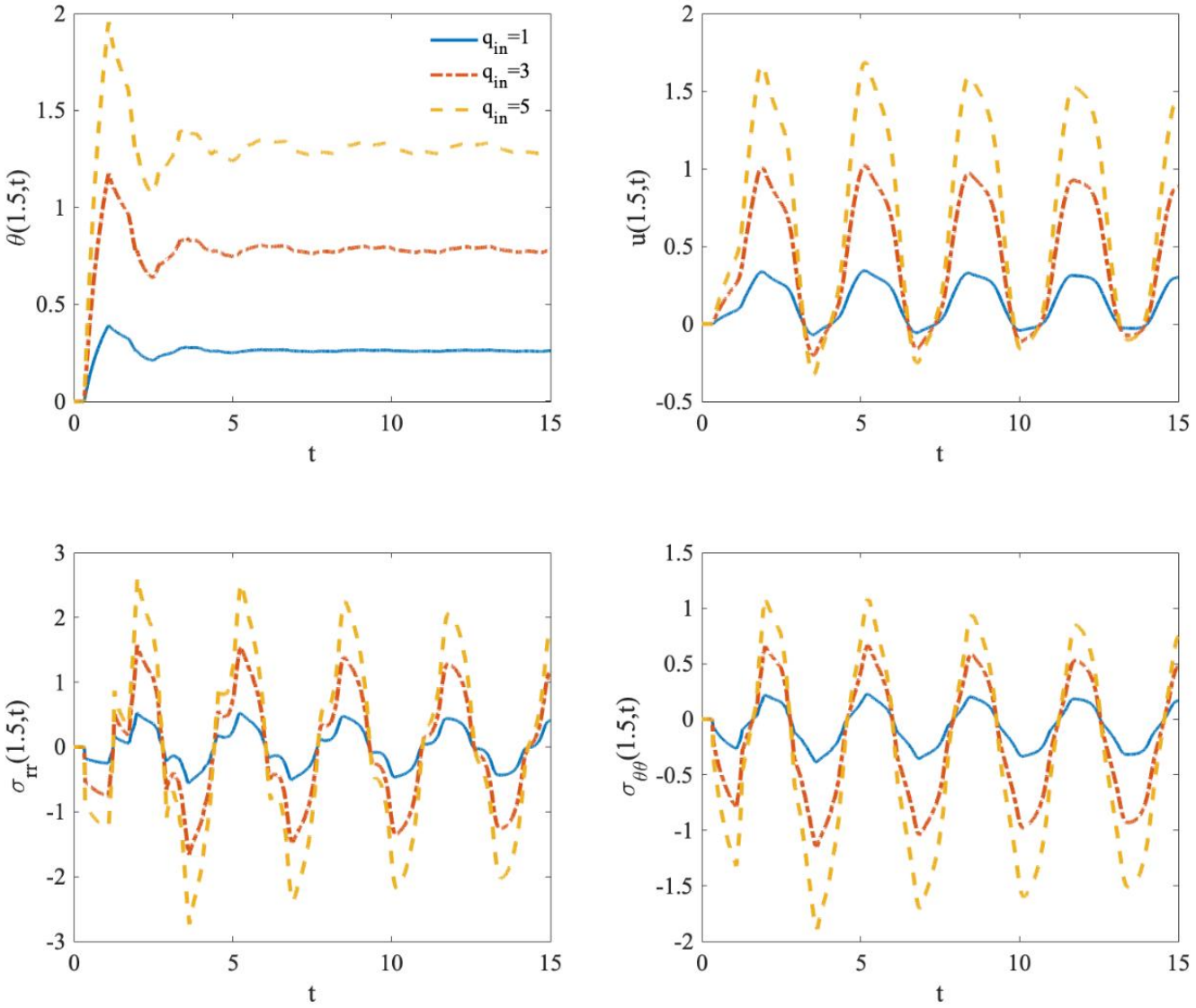
شکل ۲. تکامل زمانی جابجایی شعاعی، دما و تنش‌های شعاعی و محیطی در وسط دیسک تحت شوک حرارتی (q_{in} =۳، t_0 = ۰/۶۴)

Fig. 2. Time evolution of radial displacement, temperature, hoop and radial stresses at the middle of disk subjected to thermal shock (q_{in}=3 , t_0=0.64)



شکل ۳. تکامل زمانی جابجایی شعاعی، دما، و تنش‌های شعاعی و محیطی در وسط دیسک تحت شوک حرارتی برای مقادیر مختلف اندیس ماده مدرج تابعی(q_{in} =۳، t.= ۰/۶۴)

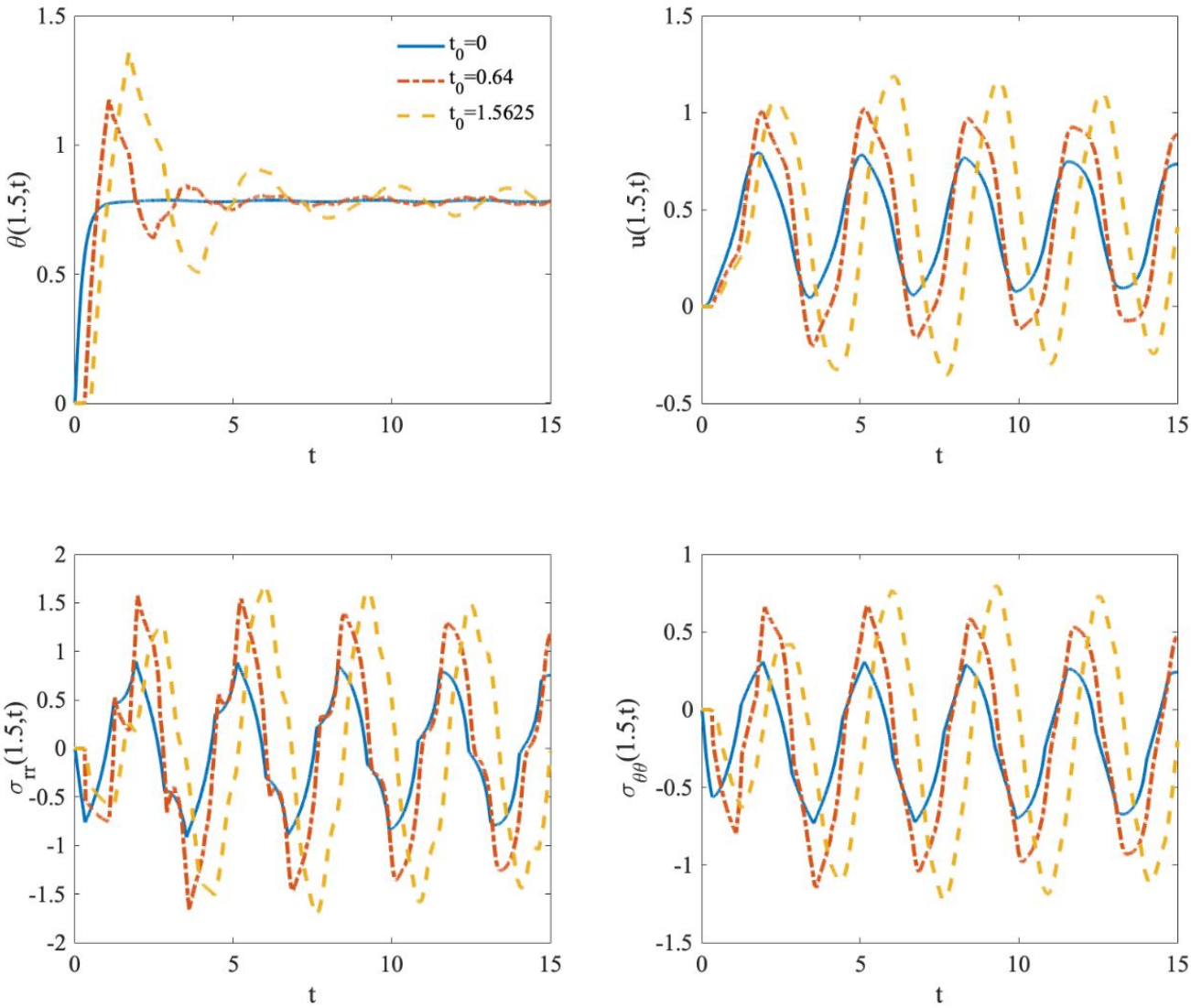
Fig. 3. Time evolution of radial displacement, temperature, hoop and radial stresses at the middle of disk subjected to thermal shock for various values of FG index (q_{in}=3 , t_0=0.64)



شکل ۴. تکامل زمانی جابجایی شعاعی، دما ، و تنش‌های شعاعی و محیطی در وسط دیسک تحت مقادیر مختلف شوک حرارتی (n =۰/۵ ، t.= ۰/۶۴)

Fig. 4. Time evolution of radial displacement, temperature, hoop and radial stresses at the middle of disk for various values of thermal shock (n=0/5 , t_0=0.64)

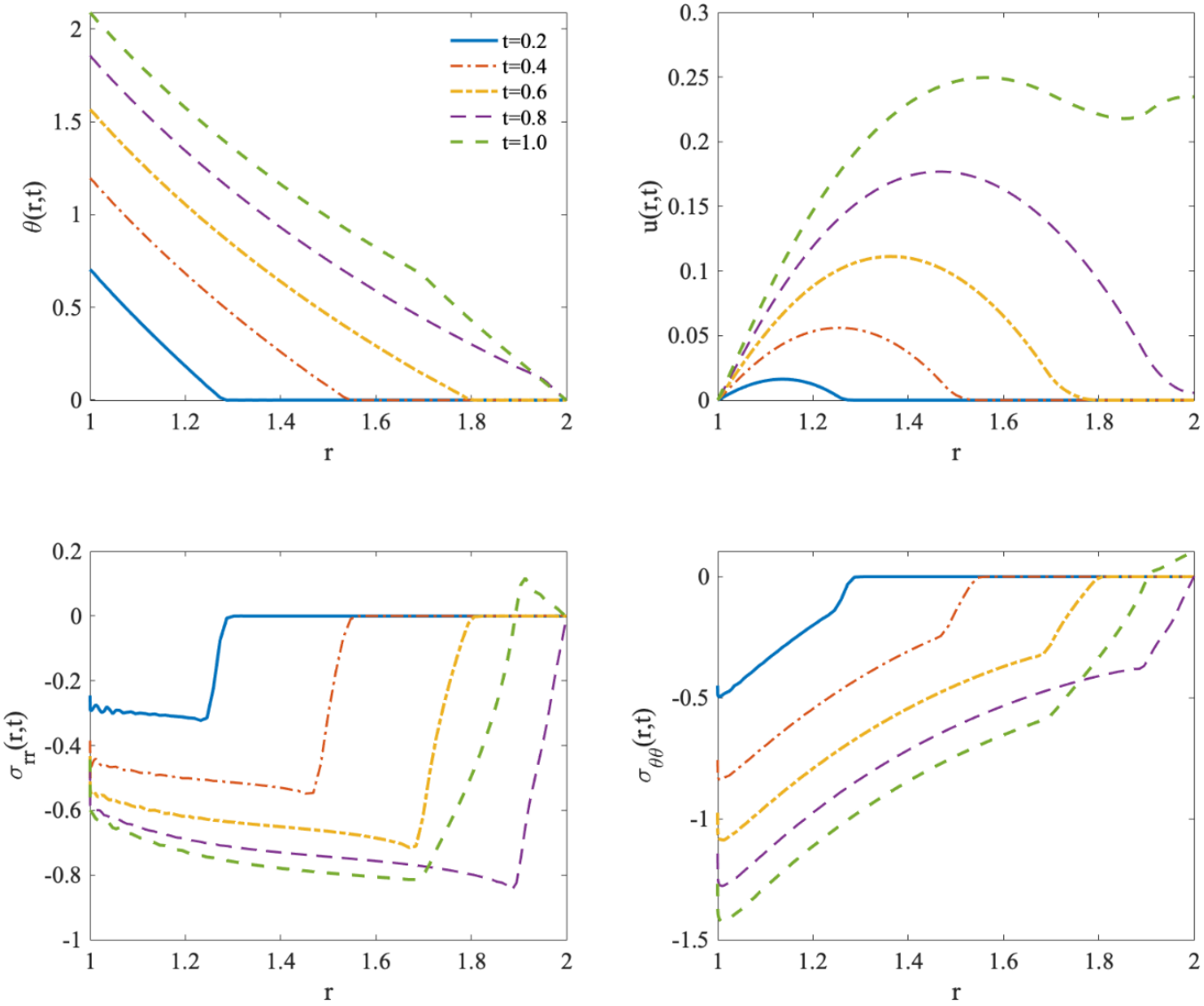
انتشار دما، جابجایی شعاعی و تنش‌های محیطی و شعاعی در وسط یک دیسک مدرج تابعی تحت شوک حرارتی داخلی برای مقادیر مختلف زمان آسایش، در شکل ۵ نشان داده شده‌اند. در واقع، این شکل برای نشان دادن توانایی تئوری لورد–شولمن در پیش‌بینی حرکت موج دما آورده شده است. زمان آسایش، تأخیر زمانی مورد نیاز برای ایجاد هدایت گرمایی حالت پایدار را در هنگام قرار گرفتن دیسک در معرض شوک حرارتی فراهم می‌کند. شکل به وضوح نشان می‌دهد که با کاهش زمان آسایش، نوسانات دما کاهش می‌یابد. همچنین، با افزایش این پارامتر، دامنه تغییرات دما افزایش می‌یابد، در حالی‌که فرکانس نوسانات کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که استفاده از فرمولبندی حرارتی غیرخطی برای مقادیر بزرگ پارامتر زمان آسایش ضروری است [۱۷].



شکل ۵. تکامل زمانی جابجایی شعاعی، دما، و تنش‌های شعاعی و محیطی در وسط دیسک تحت شوک حرارتی برای مقادیر مختلف زمان آسایش (q_{in}=۳ ، n =۰/۵)

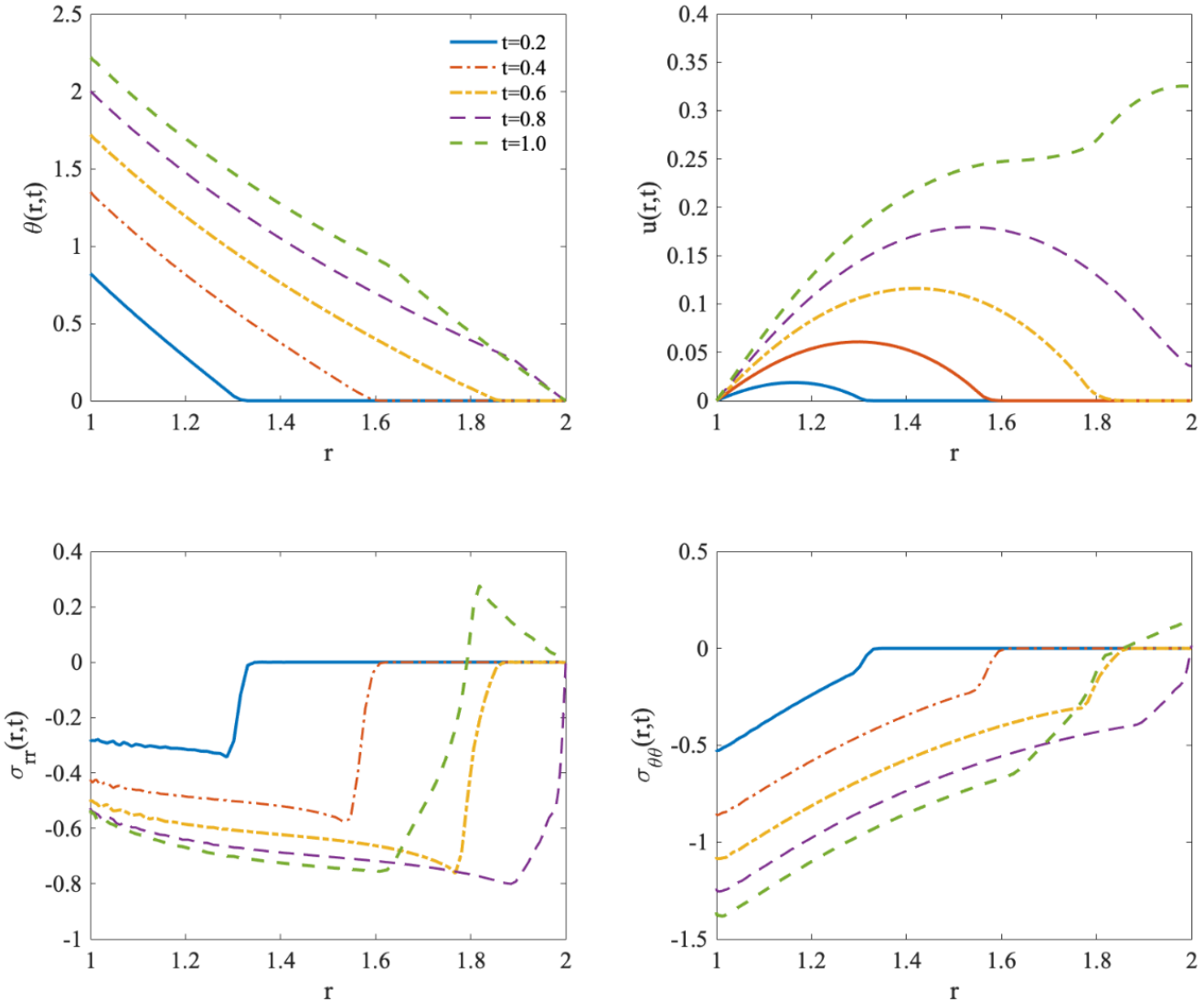
Fig. 5. Time evolution of radial displacement, temperature, hoop and radial stresses at the middle of disk subjected to thermal shock for various values of relaxation time (q_{in}=3 ,n=0/5)

توزیع دما، جابجایی شعاعی و تنش‌های محیطی و شعاعی به عنوان تابعی از شعاع دیسک در برخی از سطوح زمانی مشخص در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده‌اند. این نتایج برای اندیس ماده مدرج تابعی برابر با ۰/۲ و ۰/۵ بدست آمده‌اند. همچنین، زمان آسایش بدون بُعد (t_0) و پارامتر کوپل (C) به ترتیب ۱/۵۶۲۵ و ۰/۰۰۸۲۵۹۴ فرض شده‌اند. مطابق شکل ۶، به ازای $n=۰/۲$ و برای $t=۰/۲$، منحنی توزیع دما از $r=۱$ در حدود ۰/۷ آغاز می‌شود و با توجه به اینکه از موقعیت $r=0/$ به بعد دما صفر است می‌توان نتیجه گرفت که مکان جبهه موج دما در $r=0/$ در زمان $t=۰/۲$ است. همچنین، از آنجائی که موج دما $\Delta r=0/$ را در $\Delta t=۰/۲$ طی می‌کند، سرعت بی‌بعد موج گرمایی برابر با ۱/۴ به دست می‌آید. مطابق شکل ۷ و به ازای $n=۰/۵$، سرعت بی‌بعد انتشار موج گرما تقریباً برابر با ۱/۵ خواهد بود که این امر تأثیر افزایشی بالا رفتن اندیس ماده مدرج تابعی را بر سرعت انتشار موج نشان می‌دهد. برای سطوح زمانی $t=۰/۲,۰/۴,۰/۶,۰/۸$ دیده می‌شود که امواج جابجایی و تنش به سمت لبه دیسک انتشار می‌یابند، در حالیکه برای زمان $t=۱$ این امواج به عقب بازتاب می‌شوند. در حقیقت موج تقریباً در زمان $t=۰/۸$ به لبه خارجی دیسک رسیده است و همانطور که برای زمان $t=۱$ دیده می‌شود موج مقدار زیادی از لبه خارجی بازگشته است.



شکل ۶. توزیع جابجایی شعاعی، دما، و تنش‌های شعاعی و محیطی به عنوان تابعی از شعاع دیسک تحت شار گرما در سطح داخلی در برخی از سطوح زمانی مشخص (n= ۰/۲، q_{in} =۳، t_0= ۱/۵۶۲۵)

Fig. 6. Variations of radial displacement, temperature, hoop and radial stresses as functions of disk's radius subjected to thermal shock at the inner surface at some certain time levels (n=0.2 , q_{in}=3 , t_0=1.5625)



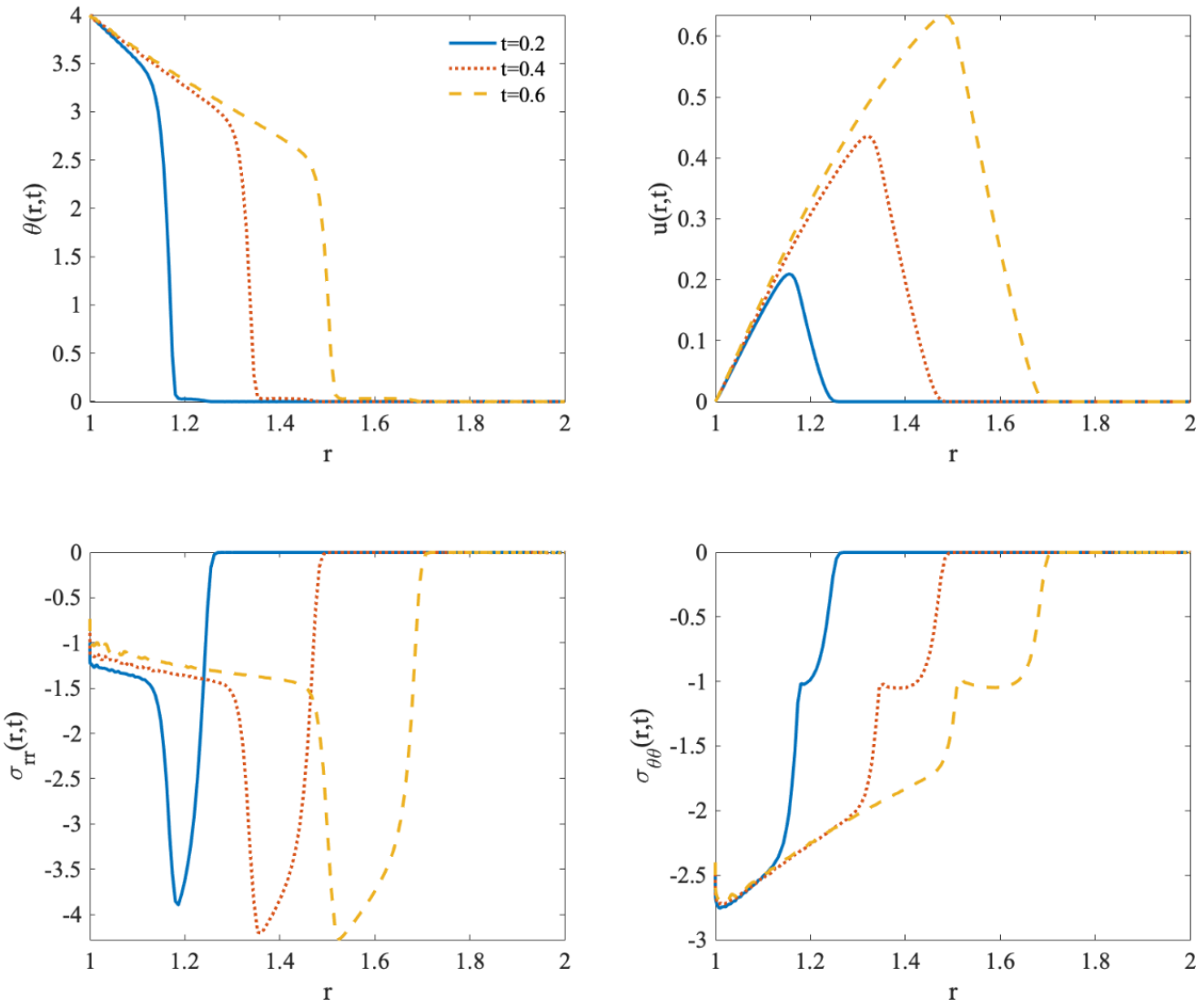
شکل ۷. توزیع جابجایی شعاعی، دما، و تنش‌های شعاعی و محیطی به عنوان تابعی از شعاع دیسک تحت شار گرما در سطح داخلی در برخی از سطوح زمانی مشخص (n= ۰/۵، q_{in} =۳، t.= ۱/۵۶۲۵)

Fig. 7. Variations of radial displacement, temperature, hoop and radial stresses as functions of disk's radius subjected to thermal shock at the inner surface at some certain time levels (n=0.2 , q_{in}=3 , t_0=1.5625)

همچنین، این شکل‌ها نشان می‌دهند که جبهه موج تنش شعاعی گرادیان بیشتری نسبت به r در مراحل آغازین اعمال شوک حرارتی دارد. باید توجه نمود که امواج شعاعی فشاری در برگشت به عقب بصورت کششی منتشر می‌شوند چرا که شرایط مرزی تنش آزاد در لبه خارجی دیسک برقرار است.

شکل‌های ۸ و ۹ تغییر دما، جابجایی شعاعی و تنش‌های محیطی و شعاعی را در جهت شعاع یک دیسک مدرج تابعی در برخی از سطوح زمانی خاص با در نظر گرفتن θ_{in} = ۴ برای اندیس ماده مدرج تابعی برابر با ۰/۲ و ۰/۵ نشان می‌دهند. در اینجا در نظر گرفته می‌شود که تغییر دمای ناگهانی به سطح داخلی دیسک اعمال می‌شود. برای این منظور، دمای اعمال شده به صورت زیر تعریف می‌شود

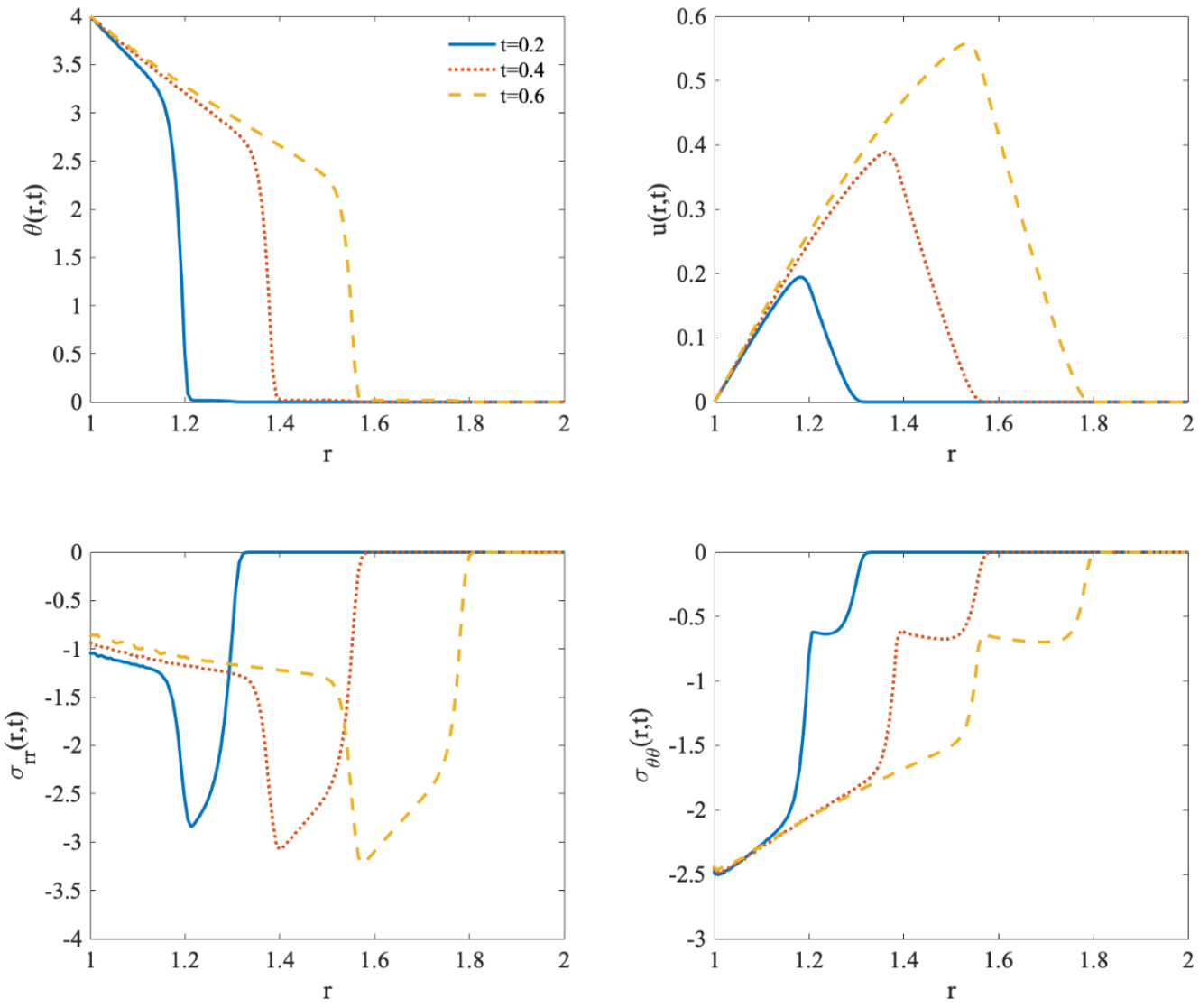
$$\rho S(x)\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}=\frac{\partial f}{\partial x} \qquad (۳۰)$$



شکل ۸ .توزیع جابجایی شعاعی، دما، و تنش‌های شعاعی و محیطی به عنوان تابعی از شعاع دیسک تحت دمای ناگهانی در سطح داخلی در برخی از سطوح زمانی مشخص (n= ۰/۲ ، θ_{in} =۴ ،t =۰/۵)

Fig. 8. Variations of radial displacement, temperature, hoop and radial stresses as functions of disk's radius subjected to sudden temperature at the inner surface at some certain time levels (n=0.2 , θ_{in} = 4 , t_0=0/5)

سه شرط مرزی دیگر با شرایط تعریف شده در معادله (۲۲) یکسان در نظر گرفته شده است. تحت این شرایط نیز، سرعت موج گرمایی به ازای $n = ۰/۲$ برابر با ۱/۴ و به ازای $n = ۰/۵$ برابر با ۱/۵ می‌باشد. در انتها لازم به ذکر است که وجود تنش‌های شعاعی و محیطی منفی در نمودارها بر اساس معادله تنش قابل توضیح می‌باشند (معادله (۵)). همانطور که در شکل‌های۲ تا ۵ می‌توان مشاهده کرد این تنش‌ها به‌صورت نوسانی حول مقدار صفر نوسان می‌کنند. ولی چون در شکل‌های ۶ تا ۹ این مقادیر برای بازه زمانی کوچکی در ابتدای ارتعاشات نشان داده شده‌اند، فقط مقادیر منفی آن‌ها مشخص است. حتی در شکل ۷ می‌توان دید با برگشت موج از لبه بیرونی دیسک، مقدار تنش شعاعی مثبت شده است.



شکل ۹. توزیع جابجایی شعاعی، دما، و تنش‌های شعاعی و محیطی به عنوان تابعی از شعاع دیسک تحت دمای ناگهانی در سطح داخلی در برخی از سطوح زمانی مشخص (t_0 =۱/۵۶۲۵، θ_{in} =۴ ، n= ۰/۵)

Fig. 9. Variations of radial displacement, temperature, hoop and radial stresses as functions of disk's radius subjected to sudden temperature at the inner surface at some certain time levels(n=0.5 , θ_{in} = 4 , t_0=1/5625)

۸- نتیجه گیری

در این پژوهش، پاسخ ترموالاستیک یک دیسک حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی که در معرض یک شوک حرارتی داخلی قرار دارد بصورت عددی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. بدین منظور، از نظریه ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته لرد-شولمن استفاده شد که قادر به در نظر گرفتن اثرات شوک حرارتی است. همچنین، در استخراج معادلات حاکم بر مسأله، اثرات غیرخطی حرارت لحاظ شدند. رهیافتی عددی نیز به کمک روش‌های تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته و انتگرالگیری مستقیم نیومارک برای حل مسأله پیشنهاد گردید. در قالب چند مثال عددی، تأثیرات اندیس گرادیان ماده، زمان آسایش و اندازه شوک حرارتی بر پاسخ ترمومکانیکی کوپل دیسک مورد مطالعه قرار گرفتند. همچنین، تأثیر دو نوع شرایط مرزی شوک حرارتی و تغییر دمای ناگهانی به سطح داخلی دیسک بر روی رفتار نوسانی دیسک بررسی و پیشروی موج ترمومکانیکی در شعاع دیسک نشان داده شد. از میان مهمترین یافته‌های مقاله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- با بزرگتر شدن اندیس ماده مدرج تابعی، دامنه جابجایی و تنش‌ها به طور محسوسی کاهش یافته و فرکانس نوسانات افزایش می‌یابد.
- با کاهش زمان آسایش، نوسانات دما کاهش می‌یابند در حالی که فرکانس نوسانات افزایش پیدا می‌کند.
- افزایش شدت شار گرما باعث افزایش دامنه جابجایی و تنش‌ها شده ولی در فرکانس نوسانات تاثیری ندارد.

منابع

[1] Z.Y. Ai, Z.K. Ye, J.J. Yang, Thermo-mechanical behaviour of multi-layered media based on the Lord-Shulman model, Computers and Geotechnics, 129 (2021) 103897.

[2] M. Arefi, A. Abbasi, M. Vaziri Sereshk, Two-dimensional thermoelastic analysis of FG cylindrical shell resting on the Pasternak foundation subjected to mechanical and thermal loads based on FSDT formulation, Journal of Thermal Stresses, 39(5) (2016) 554-570.

[3] M. Shariyat, D. Asgari, M. Azadi, Transient thermoelastic behavior of thick cylinder made of functionally graded materials with temperature-dependent properties using the finite element method, AUT Journal of Mechanical Engineering, 42(1) (2019) 9-18. (in Persian).

[4] R.B. Hetnarski, J. Ignaczak, Generalized thermoelasticity, Journal of Thermal Stresses, 22(4-5) (1999) 451-476.

[5] R. Hetnarski, J. Ignaczak, Nonclassical dynamical thermoelasticity, International Journal of Solids and Structures, 37(1-2) (2000) 215-224.

[6] H.W. Lord, Y. Shulman, A generalized dynamical theory of thermoelasticity, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 15(5) (1967) 299-309.

[7] A.E. Green, K.A. Lindsay, Thermoelasticity, Journal of Elasticity, 2(1) (1972) 1-7.

[8] A.E. Green, P.M. Naghdi, A re-examination of the basic postulates of thermomechanics, Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences, 432(1885) (1991) 171-194.

[9] A. Green, P. Naghdi, On undamped heat waves in an elastic solid, Journal of Thermal Stresses, 15(2) (1992) 253-264.

[10] P.K. Zeverdejani, Y. Kiani, Radially symmetric response of an FGM spherical pressure vessel under thermal shock using the thermally nonlinear Lord-Shulman model, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 182 (2020) 104065.

[11] Y. Heydarpour, P. Malekzadeh, F. Gholipour, Thermoelastic analysis of FG-GPLRC spherical shells under thermo-mechanical loadings based on Lord-Shulman theory, Composites Part B: Engineering, 164 (2019) 400-424.

[12] Z.Y. Ai, Z.K. Ye, J.J. Yang, Thermo-mechanical behaviour of multi-layered media based on the Lord-Shulman model, Computers and Geotechnics, 129 (2021) 103897.

[13] M.F. Oskouie, R. Ansari, H. Rouhi, Studying nonlinear thermomechanical wave propagation in a viscoelastic layer based upon the Lord-Shulman theory, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 27(10) (2020) 800-806.

[14] M. Faraji Oskouie, R. Ansari, H. Rouhi, Thermally nonlinear generalized coupled thermo-viscoelasticity of disks: a numerical variational approach, Waves in Random and Complex Media, (2020) 1-16.

[15] A. Bagri, M. Eslami, Generalized coupled thermoelasticity of disks based on the Lord–Shulman model, Journal of thermal stresses, 27(8) (2004) 691-704.

[16] A. Bagri, M. Eslami, Generalized coupled thermoelasticity of functionally graded annular disk considering the Lord–Shulman theory, Composite Structures, 83(2) (2008) 168-179.

[17] Y. Kiani, M.R. Eslami, A GDQ approach to thermally nonlinear generalized thermoelasticity of disks, Journal of Thermal Stresses, 40(1) (2017) 121-133.

[18] A. Bahtui, M. Eslami, Coupled thermoelasticity of functionally graded cylindrical shells, Mechanics research communications, 34(1) (2007) 1-18.

[19] M. Shariyat, Nonlinear transient stress and wave propagation analyses of the FGM thick cylinders, employing a unified generalized thermoelasticity theory, International Journal of Mechanical Sciences, 65(1)

thermomechanical analysis of a functionally graded cylinder subjected to mechanical, thermal, and magnetic loads, Journal of Thermal Stresses, 40(6) (2017) 765-782.

[24] N. Noda, R.B. Hetnarski, Y. Tanigawa, Thermal stresses, Routledge, 2018.

[25] C. Shu, Application of differential quadrature method to structural and vibration analysis, in: Differential Quadrature and Its Application in Engineering, Springer, 2000, pp. 186-223.

[26] J.C. Heinrich, D.W. Pepper, Intermediate finite element method: fluid flow and heat transfer applications, Routledge, 2017.

[27] J. Reddy, C. Chin, Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates, Journal of thermal Stresses, 21(6) (1998) 593-626.

(2012) 24-37.

[20] G. Rahimi, M. Arefi, M. Khoshgoftar, Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads, Applied Mathematics and Mechanics, 32(8) (2011) 997.

[21] M. Arefi, G. Rahimi, The effect of nonhomogeneity and end supports on the thermo elastic behavior of a clamped–clamped FG cylinder under mechanical and thermal loads, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 96 (2012) 30-37.

[22] M. Arefi, A. Abbasi, M. Vaziri Sereshk, Two-dimensional thermoelastic analysis of FG cylindrical shell resting on the Pasternak foundation subjected to mechanical and thermal loads based on FSDT formulation, Journal of Thermal Stresses, 39(5) (2016) 554-570.

[23] A. Loghman, M. Nasr, M. Arefi, Nonsymmetric

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Roghani, H. Rouhi , Propagation of Thermomechanical Waves in Annular Disks Made of Functionally Graded Materials under Thermal Shock , Amirkabir J. Mech Eng., 54(2) (2022) 433-450.

DOI: 10.22060/mej.2022.20085.7162

این صفحه عمداً خالی است