دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دوره ۴۷، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۴، صفحه ۱ تا ۱۰
Vol. 47, No. 2, Winter 2015, pp. 1-10

نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر (مهندسی مکانیک)
AmirKabir Jounrnal of Science & Research
(Mechanical Engineering)
(ASJR-ME)

بررسی رفتار ارتعاشی و عیب‌یابی تیر کوتاه یکسرگیردار ترک‌دار تحت نیروی محوری

موسی رضائی[۱*]، حسین جوادیان[۲]، وحید عرب‌ملکی[۳]

۱- دانشیار، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز
۳- دانشجوی دکتری، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

(دریافت: ۱۳۹۱/۹/۲۲، پذیرش: ۱۳۹۴/۴/۲۹)

چکیده

در این پژوهش بررسی رفتار ارتعاشی و عیب‌یابی تیر کوتاه یکسرگیردار ترک‌دار تحت نیروی محوری بر اساس آنالیز ارتعاشی ارائه شده است. بدین منظور اثرات نیروی محوری، تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی در نظر گرفته شده است. مقطع معیوب به صورت یک جزء انعطاف پذیر در نظر گرفته شده که تیر را به دو قسمت تقسیم می‌کند. ترک بصورت فنر پیچشی مدل شده است که سفتی معادل آن از تئوری مکانیک شکست، به دست آمده است. پس از استخراج معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار، مشخصه‌های ارتعاشی تیر معیوب به روش مستقیم استخراج شده است. به منظور عیب‌یابی، به روش معکوس از مشخصه‌های ارتعاشی استفاده شده، و موقعیت و عمق ترک تعیین می‌شود. در نهایت اثرات نیروی محوری و پارامترهای ترک بر پاسخ ارتعاشی بررسی می شود. صحت نتایج به دست آمده با استفاده از نتایج تئوری و تجربی ارائه شده در تحقیقات پیشین به اثبات رسیده است.

کلمات کلیدی

تیر ترک‌دار، نیروی محوری، تیر تیموشنکو، عیب‌یابی

* نویسنده مسئول و عهده دار مکاتبات، Email: m_rezaee@tabrizu.ac.ir

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، تحقیق در زمینه توانایی تحت نظر قرار دادن یک سازه و تعیین آسیب دیدگی‌های احتمالی آن در زودترین مرحله ممکن، مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. تحقیقات نشان می‌دهد که تحلیل ارتعاشی می‌تواند روش مؤثری در عیب‌یابی سازه‌ها باشد. ایده اولیـه روش عیب‌یابی بر اساس مشخصات ارتعاشی سازه، بر مبنای وابستگی مشخصه‌های ارتعاشی سازه، شامل فرکانس‌ها و شکل‌های مودی به خواص فیزیکی از جمله جرم و سفتی می‌باشد. بدین ترتیب می‌توان با اندازه‌گیری و بررسی تغییرات مشخصه‌های ارتعاشی سازه به تغییرات در خواص فیزیکی آن پی‌برد. در روش عیب‌یابی بر اساس آنالیز ارتعاشی، با معلوم بودن مشخصات ارتعاشی سازه، مشخصه‌های ترک شامل موقعیت و شدت آن محاسبه می‌شوند.

محققان متعددی اثرات عیب بر روی رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار را مورد بررسی قرار داده‌اند. دوبلینگ خلاصه‌ای از تحقیقات انجام شده در زمینه شناسایی ترک در سازه‌ها بر اساس آنالیز ارتعاشی را ارائه کرده است [۱]. بر اساس تحقیق مذکور روش‌های برآورد موقعیت و عمق ترک عموماً براساس بررسی تغییرات فرکانس‌های طبیعی [۲-۶] تغییرات شکل مودهای ارتعاشی [۵-۷] یا اندازه‌گیری سفتی دینامیکی[1] [۸-۱۰] صورت می‌پذیرد. سالوا خلاصه‌ای از تحقیقات انجام شده در زمینه شناسایی ترک در سازه‌ها بر اساس بررسی تغییرات فرکانس‌های طبیعی را ارائه کرده است [۱۱]. آدامز و پِی ارتعاش طولی میله ترک‌دار را مورد بررسی قرار داده‌اند [۱۲]. آنها به منظور این تحلیل، ترک را به صورت یک فنر بدون جرم و با طول بی‌نهایت کوچک که دو جزء تقسیم شده میله در محل ترک را به هم مرتبط می‌سازد، مدل کردند. اوستاچوویچز و کراوسوزیک [۱۳] به بررسی اثر ترک بر روی فرکانس‌های طبیعی تیر یکسرگیردار با دو ترک پرداختند. آنها با استفاده از مکانیک شکست سفتی معادل ترک در محل ترک را به دست آوردند و با استفاده از معادله فرکانسی تیر، فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار را محاسبه کردند. کارنیرو و اینمان [۱۴] یک مدل پیوسته برای ارتعاشات عرضی تیر تیموشنکو ترک‌دار ارائه دادند. مایتی و لِلی [۱۵] روشی برای مشخص کردن ترک در تیرهای کوتاه با استفاده از ارتعاشات عرضی ارائه دادند. در این روش اثر نیروی برشی و اینرسی دورانی در تیر کوتاه بدون حضور نیروهای محوری مورد بررسی قرار گرفته است. آنها نشان دادند که با در نظر نگرفتن اثر نیروهای برشی و اینرسی دورانی برای تیرهای کوتاه مقدار خطا تا ۲۰۰% افزایش می‌یابد، در حالیکه با استفاده از معادلات مربوط به تیرهای کوتاه مقدار خطا تا ۱۵% کاهش می‌یابد و هر چه نسبت طول تیر به ارتفاع سطح مقطع آن بیشتر باشد این اختلاف کمتر می‌شود و نتایج تئوری اویلر- برنولی دقیق‌تر می‌شود. آنها همچنین روشی برای تعیین عمق و محل ترک براساس فرکانس‌های طبیعی تیر که از آزمایش به دست می‌آیند ارائه دادند. دوکا [۱۶] برای تشخیص ترک در تیرهای دارای دو ترک باز در امتداد تیر تحقیقی انجام دادند و نشان دادند که وجود ترک باعث تغییر در فرکانس‌های طبیعی تیر می‌شود که می‌توان از آن به عنوان یک مشخصه در تشخیص ترک استفاده کرد. باریس [۱۷] ارتعاشات تیر اولر ـ برنولی با چند ترک باز تحت تاثیر نیروی محوری را مورد مطالعه قرار داده و نشان داده است که بارهای فشاری که تا ۳۰% مقدار بار کمانش هستند، می‌توانند اولین فرکانس طبیعی تیر را تا ۱۵% تغییر دهند. این اثر در سایر فرکان‌ها کمتر است. سینها و فریسول [۱۸] با استفاده از تئوری تیر اویلر- برنولی به بررسی رفتار ارتعاشی و ترک‌یابی در تیر ترک‌دار پرداخته‌اند. خواجی و همکاران [۱۹] به بررسی رفتار ارتعاشی و ترک‌یابی در تیرهای کوتاه ترک‌دار پرداخته‌اند. آنها ترک را به صورت ترک باز و توسط فنر پیچشی مدل نموده‌اند و نتایج را با نتایج حاصل از روش‌های عددی مورد مقایسه قرار داده‌اند. اسماعیل‌زاده خادم و رضائی [۲۰] ترک‌یابی در صفحات مستطیلی با استفاده از آنالیز ارتعاشی را مورد بررسی قرار داده‌اند و روشی معکوس برای مشخص نمودن ترک با توجه به پاسخ‌های فرکانسی ارائه داده‌اند. همچنین آنها در سال ۱۳۷۹ [۲۱] روش جدیدی را برای ترک‌یابی لوله‌های جدار ضخیم ارائه دادند. در بسیاری از تحقیقات انجام شده در این زمینه، تیر بدون حضور نیروهای خارجی در نظر گرفته شده است. در سازه‌های واقعی، تیرهای به کار رفته در سازه تحت تأثیر نیروهای خارجی هستند و بدیهی است که در نظر نگرفتن این عامل باعث خطا در نتایج خواهد شد. در جدیدترین تحقیق صورت گرفته در این زمینه توسط مِی و همکاران [۲۲] تیر تیموشنکوی ترک‌دار تحت نیروی محوری مورد بررسی قرار گرفته است و با استفاده از روش انتشار موج[2] فرکانس‌های طبیعی این نوع تیر به دست آمده است. در تحقیق مذکور تنها به تحلیل فرکانسی پرداخته شده است و روشی برای شناسایی ترک در این گونه تیرها ارائه نگردیده است.

در این مقاله شناسایی ترک در تیر تیموشنکو تحت نیروی محوری بررسی می‌شود. عیب به صورت ترک باز در نظر گرفته می‌شود و ترک به صورت یک فنر پیچشی که تیر را به دو قسمت تقسیم می‌کند، مدل می‌شود. پس از استخراج معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر ترکدار با استفاده از اصل همیلتون، مشخصه‌های ارتعاشی تیر معیوب به روش مستقیم استخراج می‌شوند. سپس به منظور عیب‌یابی، به روش معکوس از مشخصه‌های ارتعاشی استفاده شده، و محل و عمق ترک تعیین می‌شود. به منظور بالا بردن دقت مدل، اثر نیروی برشی و اینرسی دورانی و همچنین نیروی محوری در نظر گرفته خواهد شد. سپس به بررسی اثرات نیروی محوری و همچنین پارامترهای ترک (موقعیت و عمق ترک) بر پاسخ ارتعاشی پرداخته می‌شود. در نهایت از نتایج تست‌های تجربی و نتایج تحلیلی موجود برای تأیید صحت روش به دست آمده استفاده می‌شود.

[1] Dynamic stiffness

[2] Wave propagation

۲- استخراج روابط حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر کوتاه ترک-دار تحت نیروی محوری

در تحقیق حاضر، ارتعاشات آزاد تیر کوتاه دارای ترک خستگی عرضی مورد بررسی قرار گرفته است (شکل ۱). ترک در فاصله L_1 از ابتدای تیر قرارگرفته است. ترک به صورت یک فنر پیچشی با سفتی K_t، که مقدار آن از رابطه (۱) تعیین می‌شود، مدل شده است [۲۳].

$$k_t = \frac{Ewh^4}{72\pi \int_0^a a\left[f\left(\frac{a}{h}\right)\right]^2 da} \qquad (۱)$$

در رابطه فوق، E مدول الاستیسیته، h و w به ترتیب ارتفاع و عرض سطح مقطع تیر می‌باشند و $f\left(a/h\right)$ توسط رابطه زیر تعیین می‌شود [۲۴]:

(۲)

$$\left[f\left(\frac{a}{h}\right)\right]^2 = 1.2769 - 3.105\frac{a}{h} + 14.878\left(\frac{a}{h}\right)^2 - 25.8\left(\frac{a}{h}\right)^3 + 45.32\left(\frac{a}{h}\right)^4 - 51.33\left(\frac{a}{h}\right)^5 + 64.39\left(\frac{a}{h}\right)^6 - 62.96\left(\frac{a}{h}\right)^7 + 200.9\left(\frac{a}{h}\right)^8 - 243.2\left(\frac{a}{h}\right)^9 + 83.16\left(\frac{a}{h}\right)^{10} + 225.6\left(\frac{a}{h}\right)^{12}$$

با استفاده از اصل همیلتون، رابطه حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر کوتاه تحت نیروی محوری به صورت زیر به دست می‌آید:

(۳)

$$EI\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \kappa GA\left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t)\right] - \rho I\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

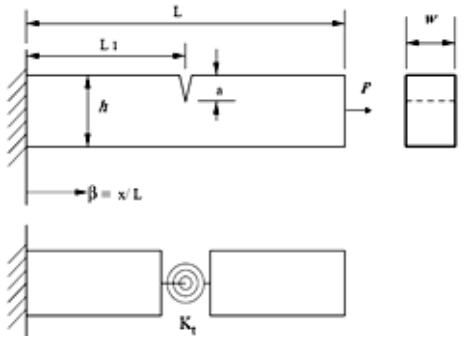
(۴)

$$\rho A\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \kappa GA\left[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right] - P\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

که در آن y خیز عرضی، ψ زاویه دوران مقطع عرضی تیر ناشی از گشتاور خمشی، E مدول الاستیسیته، G مدول برشی، A مساحت سطح مقطع، I ممان اینرسی سطح، ρ چگالی و κ ضریب سطح است که به شکل سطح مقطع تیر بستگی دارد و P نیروی محوری است.

برای حل روابط (۳) و (۴) توابع $\psi(x,t)$ و $y(x,t)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\psi(x,t) = \Psi(x)e^{i\omega t} \qquad (۵)$$



شکل ۱: مدل تیر کوتاه ترک دار

$$y(x,t) = Y(x)e^{i\omega t} \qquad (۶)$$

با جایگذاری روابط یاد شده در روابط (۳) و (۴) خواهیم داشت:

(۷)

$$EI\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \kappa GA\left[\frac{dY(x)}{dx} - \Psi(x)\right] + \rho I\omega^2\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = 0$$

(۸)

$$\rho A\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \kappa GA\left[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right] - P\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

برای حل رابطه‌های (۷) و (۸) دو رابطه را در یکدیگر ادغام و نسبت به یکی از متغیرها حل می‌کنیم. با حذف تابع $\psi(x,t)$ از رابطه‌های (۷) و (۸) داریم:

(۹)

$$EI(\kappa GA + P)\frac{d^4Y}{dx^4} + \left(-\kappa GA\rho I\omega^2 - EI\rho A\omega^2 - P\rho I\omega^2 + P\kappa GA\right)\frac{d^4Y}{dx^4} + \left(\rho A^2\omega^2\kappa G + \rho^2 A\omega^4 I\right)Y(x) = 0$$

جواب رابطه (۹) به شکل زیر می‌باشد:

$$Y(x) = A_1\sinh(bp\beta) + A_2\cosh(bp\beta) + A_3\sin(bq\beta) + A_4\cos(bq\beta) \qquad (۱۰)$$

به طریق مشابه تابع $\psi(x,t)$ را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\Psi(x) = B_1\sinh(bp\beta) + B_2\cosh(bp\beta) + B_3\sin(bq\beta) + B_4\cos(bq\beta) \qquad (۱۱)$$

در روابط (۱۰) و (۱۱) پارامترها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

(۱۲)

$$p = \sqrt{\frac{-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4a_0c_0}}{2a_0}}, \quad q = \sqrt{\frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4a_0c_0}}{2a_0}}$$

(۱۳)

$$a_0 = 1-\varphi s^2\ ,\ b_0 = r^2+s^2-r^2s^2\varphi+\frac{\varphi}{b^2}\ ,\quad c_0 = r^2s^2-\frac{L^2}{r^2}$$

و A_i $i=$ ۱،۲،۳،۴ و B_i ضرایب ثابتی هستند که مقدار آنها از اعمال شرایط مرزی و بین مرزی به دست می‌آیند. تنها چهار تا از این ثوابت مستقل از هم هستند. برای به دست آوردن رابطه بین این ثوابت، روابط (۱۰) و (۱۱) را در رابطه (۸) جایگذاری و با متحد قرار دادن ضرایب توابع مثلثاتی در طرفین رابطه، خواهیم داشت:

(۱۴)

$$\beta=\frac{x}{L},\ b^2=\frac{\rho AL^4\omega^2}{EI},\ r^2=\frac{I}{AL^2},\ s^2=\frac{EI}{\kappa GAL^2},\ \varphi=-\frac{PL^2}{EI}$$

(۱۵)

$$B_i=\frac{b}{L}\left(\frac{s^2+p^2\left(1-\varphi s^2\right)}{p}\right)A_i,\qquad i=1,2$$

(۱۶)

$$B_i=(-1)^{i+1}\frac{b}{L}\left(\frac{s^2-q^2\left(1-\varphi s^2\right)}{q}\right)A_i,\qquad i=3,4$$

برای تیر ترک‌دار (شکل۱) دو قسمت مجزای تیر را می‌توان به صورت جداگانه تحلیل کرد. پاسخ هر قسمت از تیر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

(۱۷)

$$Y_1(x)=C_1\sinh(bp\beta)+C_2\cosh(bp\beta)+C_3\sin(bq\beta)+C_4\cos(bq\beta)$$

(۱۸)

$$\Psi_1(x)=D_1\sinh(bp\beta)+D_2\cosh(bp\beta)+D_3\sin(bq\beta)+D_4\cos(bq\beta)$$

(۱۹)

$$Y_2(x)=C_5\sinh(bp\beta)+C_6\cosh(bp\beta)+C_7\sin(bq\beta)+C_8\cos(bq\beta)$$

(۲۰)

$$\Psi_2(x)=D_5\sinh(bp\beta)+D_6\cosh(bp\beta)+D_7\sin(bq\beta)+D_8\cos(bq\beta)$$

با توجه به روابط (۱۵) و (۱۶) ارتباط بین ضرایب C_i و D_i در روابط فوق به صورت زیر است:

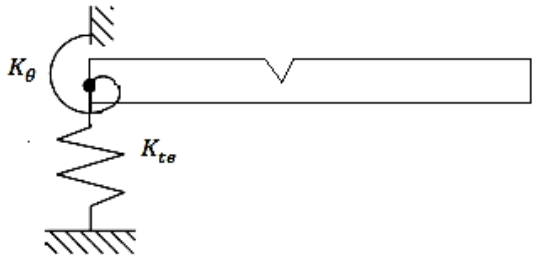
(۲۱)

$$D_i=\frac{b}{L}\left(\frac{s^2+p^2\left(1-\varphi s^2\right)}{p}\right)C_i,\qquad i=1,2,5,6$$

(۲۲)

$$D_i=(-1)^{i+1}\frac{b}{L}\left(\frac{s^2-q^2\left(1-\varphi s^2\right)}{q}\right)C_i,\qquad i=3,4,7,8$$

صحت روابط به دست آمده را می‌توان با توجه به مرجع [۱۵] که در آن رفتار ارتعاشی تیر کوتاه در غیاب نیروی محوری بررسی شده است و با صفر قرار دادن مقدار نیروی محوری در روابط فوق به اثبات رساند. در عمل تکیه‌گاه گیردار به صورت کاملاً صلب عمل نمی‌کند و تکیه‌گاه دارای انعطاف‌پذیری است که اصطلاحاً سفتی مرزی[3] نامیده می‌شود [۱۸]. در تحقیق حاضر برای ایجاد مدل واقع بینانه‌تر، تکیه‌گاه به صورت غیر صلب و توسط فنر پیچشی با سفتی K_θ و فنر راستایی با سفتی K_{te} که هر کدام به ترتیب در برابر شیب و خیز تیر مقاومت نشان می‌دهند مدل شده است (شکل ۲).



شکل ۲: مدل تکیه گاه غیر صلب

با توجه به این که در تیر تیموشنکو تحت نیروی محوری، نیروی برشی و گشتاور خمشی به صورت زیر می‌باشد:

(۲۳)

$$M(x,t)=-EI\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$$

(۲۴)

$$V(x,t)=-EI\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\rho I\omega^2\psi(x,t)+P\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

لذا با استفاده از اصل همیلتون، شرایط مرزی برای تیر یکسرگیردار با تکیه گاه غیر صلب را می‌توان به صورت زیر استخراج کرد:

(۲۵)

$$\left(EI\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}\right)\delta\Psi\Big|_{\beta=0}^{1}+K_\theta\frac{dY}{d\beta}\Big|_{\beta-0}=0$$

(۲۶)

$$\left\{\frac{L^2}{EI}\left(\frac{d^2\Psi}{d\beta^2}+r^2b^2\Psi+\frac{\varphi}{L}\frac{dY}{d\beta}\right)\right\}\delta Y\Big|_{\beta=0}^{1}+K_{te}Y\big|_{\beta=0}=0$$

شرایط پیوستگی جابجایی، گشتاور و نیروی برشی در محل ترک و اختلاف شیب ایجاد شده در طرفین ترک ($\beta=\beta^*$) را می‌توان به ترتیب به صورت زیر نوشت:

(۲۷)

$$Y_1(\beta)=Y_2(\beta)$$

[3] Boundary stiffness

$$\frac{d\psi_1(\beta)}{d\beta}=\frac{d\psi_2(\beta)}{d\beta} \tag{۲۸}$$

$$\frac{d^2\Psi_1(\beta)}{d\beta^2}+r^2b^2\Psi_1(\beta)+\frac{\varphi}{L}\frac{dY_1}{d\beta}(\beta)=\frac{d^2\Psi_2(\beta)}{d\beta^2}+r^2b^2\Psi_2(\beta)+\frac{\varphi}{L}\frac{dY_2}{d\beta}(\beta) \tag{۲۹}$$

$$\frac{dY_1(\beta)}{d\beta}+\frac{L}{k}\frac{d\psi_1(\beta)}{d\beta}=\frac{dY_2(\beta)}{d\beta} \tag{۳۰}$$

که در آن $k={k_tL}/{EI}$ ضریب سفتی بی‌بُعد فنر پیچشی مدل کننده ترک است.

۳- استخراج فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار

پس از اعمال شرایط مرزی (۲۵) تا (۲۶) و شرایط بین مرزی (۲۴) تا (۳۰) به روابط (۱۷) تا (۲۰) و در نظر گرفتن روابط (۲۱) و (۲۲) به هشت معادله جبری برحسب ضرایب مجهول C_i می‌رسیم که به صورت زیر می‌باشد:

$$[\Delta]\{C_i\}=0 \tag{۳۱}$$

که در آن ماتریس ضرایب Δ بستگی به شرایط مرزی و بین مرزی، مشخصات هندسی و مکانیکی تیر دارد. برای داشتن جواب غیر بدیهی باید دترمینان ماتریس ضرایب در رابطه فوق برابر صفر شود، لذا معادله فرکانسی به صورت رابطه (۳۲) به دست می آید. که در آن β^* معرف موقعیت نسبی ترک (نسبت فاصله ترک از تکیه‌گاه گیردار به طول تیر) می باشد و پارامترهای کمکی به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\xi=s^2+p^2(1-\varphi s^2) \tag{۳۳}$$

$$\xi_p=q(b^2p^2\xi+b^2r^2\xi+\varphi p^2) \tag{۳۴}$$

$$\gamma=s^2-q^2(1-\varphi s^2) \tag{۳۵}$$

$$\gamma_q=p(b^2p^2\gamma-b^2r^2\gamma+\varphi p^2) \tag{۳۶}$$

٤- شناسایی ترک در تیر

برای حل مسأله معکوس که شامل شناسایی ترک در تیر ترک‌دار می‌باشد، بایستی رابطه بین ضریب سفتی بی‌بُعد شده فنر k ، و موقعیت ترک β^* ، استخراج شود. بدین منظور از بسط دترمینان $|\Delta|$ حول سطری که در آن می‌باشد و با توجه به اینکه k فقط در شرط پیوستگی ترک ظاهر می‌شود، با جداسازی عبارات شامل k می‌توان دو ماتریس Δ_1 و Δ_2 را به دست آورد، که در این صورت معادله مشخصه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$k=\frac{|\Delta_1|}{|\Delta_2|} \tag{۳۷}$$

$$\begin{vmatrix} K_{te}EIpq & Lbq(b^2p^2\xi+\varphi p^2+b^2r^2\xi) & K_{te}EIpq & Lbp(b^2q^2\gamma+\varphi q^2-b^2r^2\gamma) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ EIb\xi & K_\theta Lp & EIb\gamma & K_\theta Lq & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_p\sinh(bp) & \xi_p\cosh(bp) & -\gamma_q\sin(bq) & \gamma_q\cos(bq) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\cosh(bp) & \xi\sinh(bp) & \gamma_q\cos(bq) & \gamma_q\sin(bq) \\ -\xi_p\sinh(bp\beta^*) & -\xi_p\cosh(bp\beta^*) & -\gamma_q\sin(bq\beta^*) & -\gamma_q\cos(bq\beta^*) & \xi_p\sinh(bp\beta^*) & \xi_p\cosh(bp\beta^*) & -\gamma_q\sin(bq\beta^*) & \gamma_q\cos(bq\beta^*) \\ \xi\cosh(bp\beta^*) & \xi\sinh(bp\beta^*) & \gamma_q\cos(bq\beta^*) & \gamma_q\sin(bq\beta^*) & -\xi\cosh(bp\beta^*) & -\xi\sinh(bp\beta^*) & -\gamma\cos(bq\beta^*) & -\gamma\sin(bq\beta^*) \\ \cosh(bp\beta^*) & \sinh(bp\beta^*) & \cos(bq\beta^*) & \sin(bq\beta^*) & -\cosh(bp\beta^*) & -\sinh(bp\beta^*) & -\cos(bq\beta^*) & -\sin(bq\beta^*) \\ [kp\sinh(bp\beta^*)+ & [kp\cosh(bp\beta^*)+ & [-kq\sin(bq\beta^*)+ & [kq\cos(bq\beta^*)+ & -kp\sinh(bp\beta^*) & -kp\cosh(bp\beta^*) & kq\sin(bq\beta^*) & -kq\cos(bq\beta^*) \\ b\xi\cosh(bp\beta^*)] & b\xi\sinh(bp\beta^*)] & b\gamma\cos(bq\beta^*)] & b\gamma\sin(bq\beta^*)] & & & & \end{vmatrix}=0 \tag{۳۲}$$

از آنجایی که ضریب سفتی بی‌بُعد فنر k ، و موقعیت ترک مستقل از مود ارتعاشی تیر هستند، لذا با داشتن حداقل سه فرکانس اول تیر و رسم نمودار k برحسب β (رابطه (۳۷))، می‌توان از محل تقاطع این سه نمودار موقعیت ترک و ضریب سفتی فنر را به دست آورد. اگر سه نمودار دقیقاً در یک نقطه همدیگر را قطع نکنند از مختصه‌های مرکز هندسی تقاط تلاقی نمودارها برای استخراج مختصه‌های ترک استفاده می‌کنیم.

هدف از شناسایی ترک، تشخیص موقعیت و عمق آن با استفاده از فرکانس‌های طبیعی است. فرکانس‌های طبیعی که از حل تحلیلی به دست می‌آیند با مقادیر تجربی اختلاف دارند. این اختلاف مطمئناً خطایی را در شناسایی ترک در روش معکوس ایجاد خواهد کرد. به همین دلیل سعی می‌شود که این خطا به حداقل برسد. روش به کار گرفته شده در اینجا میزان سازی[4] نام دارد. در این روش برای به حداقل رساندن خطا در شناسایی ترک از اختلاف فرکانس‌های به دست آمده برای تیر مورد نظر به صورت تحلیلی و تجربی استفاده می‌شود. اگر ω^t فرکانس تحلیلی و ω^e فرکانس تجربی به دست آمده از تست‌های تجربی باشد، هنگام محاسبات مربوط به شناسایی ترک در تیر از مدول یانگ اصلاح شده (E_D) استفاده می‌کنیم. مدول یانگ اصلاح شده از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۱۵]:

$$\frac{E}{E_D}=\left(\frac{\omega^e}{\omega^t}\right)^2 \qquad (۳۸)$$

۵- نتایج تحلیلی

به منظور مقایسه نتایج حاصل از روش فوق با نتایج موجود، نمونه تیر یکسرگیردار ترک‌دار با ابعاد هندسی و مشخصات مکانیکی مطابق جدول ۱ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در مرجع [۱۸] که به شناسایی ترک در تیر اویلر- برنولی یکسرگیردار پرداخته است، تکیه‌گاه گیردار به صورت غیر صلب مدل شده است. در تحقیق حاضر، به منظور یکسان سازی فرکانس‌های طبیعی تیر سالم با فرکانس‌های تیر سالم حاصل از نتایج تجربی، تکیه‌گاه گیردار به صورت غیر صلب با مقادیر سفتی مرزی مطابق جدول ۱ در نظر گرفته شده است. برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار با عمق و موقعیت نسبی مشخص ترک، لازم است معادله فرکانسی (رابطه (۳۲)) به منظور به دست آوردن پارامتر فرکانسی حل شود. به منظور تصدیق مدل، معادله فرکانسی تیر یکسرگیردار ترک‌دار با عمق و موقعیت‌های مختلف تحت نیروی محوری استخراج شده و نتایج حاصل برای فرکانس‌های طبیعی با نتایج آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار گرفته است. در نمونه اول تیر آلومینیومی یکسرگیردار ترک‌دار که به ازای موقعیت و عمق مختلف ترک، فرکانس‌های طبیعی آن از نتایج تست‌های تجربی موجود در مرجع [۱۵] استخراج شده‌اند مورد بررسی قرار می‌گیرد.

[4] Zero setting

جدول ۱: مشخصات مکانیکی و هندسی تیرهای یکسرگیردار تحت نیروی محوری با جنس‌های مختلف

جنس	آلومینیوم	مس
نسبت پواسون (υ)	0.33	0.29
$EI\ (Nm^2)$	206.388	0.3051
$\kappa GA\ (N)$	5.368e6	6754.356
$\rho A\ (kg/m)$	0.778	0.0544
طول تیر (L)	100 (mm)	190.5 (mm)
عرض تیر (w)	12 (mm)	12.7 (mm)
ارتفاع تیر (h)	24.5 (mm)	31.8 (mm)
سفتی مرزی: K_{te}= 26.5 MN/m ، K_θ= 150 kNm/rad		

به منظور مقایسه نتایج تئوری و تجربی، در جدول ۲ فرکانس های طبیعی حاصل از مدل ارائه شده و نتایج تجربی که در مرجع [۱۵] برای تیر آلومینیومی ارائه شده است، آورده شده است. $a = h/a$ پارامتر بی‌بُعد ترک است که نشان دهنده عمق نسبی ترک (نسبت عمق ترک به ارتفاع سطح مقطع تیر) می‌باشد. همانطوری که از جدول ۲ ملاحظه می‌شود حداکثر خطای مدل در تعیین فرکانس‌های طبیعی با نتایج تجربی ۸/۵% می‌باشد. نتایج فوق در غیاب نیروهای محوری به دست آمده‌اند و مشاهده می‌شود که میانگین خطای مدل ارائه شده در تعیین فرکانس‌های طبیعی کمتر از خطای نتایج ارائه شده مرجع [۱۵] می‌باشد که به بررسی رفتار ارتعاشی و عیب‌یابی در تیرهای کوتاه در غیاب نیروی محوری پرداخته است. علت این کاهش خطا را ناشی از فرض غیرصلب بودن تکیه‌گاه گیردار که باعث افزایش دقت مدل شده است می‌باشد. در نمونه دوم تیر یکسرگیردار ترک‌دار که مشخصات آن در جدول ۱ بیان شده است به ازای عمق و موقعیت‌های مختلف ترک تحت نیرو قرار گرفته و فرکانس‌های طبیعی با استفاده از معادله فرکانسی محاسبه شده است. در جدول ۳ نتایج حاصل از مدل ارائه شده و نتایجی که با استفاده از روش انتشار موج در مرجع [۲۲] به دست آمده‌اند، به منظور مقایسه نشان داده شده است. همان گونه از جدول ۳ مشخص است در محدوده نیروی کششی نتایج حاصل از مدل تیموشنکو و نتایج موجود سازگاری قابل قبولی با هم دارند. برای فرکانس سه اول حداکثر خطای مدل به ترتیب۳/۴۰%، ۶/۱۲% و ۳/۸۷% به‌دست می‌آید. همچنین با توجه به جدول ۳ مشاهده می‌شود که نیروی کششی باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی تیر می‌شود.

جدا از تاثیر نیرو، ترک باعث نرمی تیر شده و سبب کاهش فرکانس‌های طبیعی تیر می‌شود. در شکل ۳ منحنی تغییرات نسبت فرکانسی اول (نسبت فرکانس طبیعی اول تیر ترک‌دار به اولین فرکانس طبیعی متناظر در تیر تیموشنکو بدون ترک) محاسبه شده با استفاده از مدل ارائه شده در تحقیق حاضر بر حسب عمق نسبی ترک به ازای مقادیر مختلف موقعیت نسبی ترک و نیروی محوری رسم شده است.

جدول ۲: مقایسه فرکانس‌های طبیعی تیر یک سرگیردار ترک‌دار آلومینیومی حاصل از مدل تئوری ارائه شده و نتایج تجربی به ازای موقعیت نسبی $\alpha=0.506$ و عمق نسبی $\beta^*=0.2$

فرکانس (Hz)	نتایج تجربی [15]	نتایج مدل ارائه شده	Lele [15]	خطا (%)	
				مدل ارائه شده	Lele [15]
f_1	۱۱۰۰,۰	۱۰۶۲,۵	۱۰۷۱,۲	۳,۵	۲,۶۲
f_2	۷۸۵۰,۰	۸۵۲۲,۷	۹۰۲۳,۶	۸,۵	۱۴,۹۵
f_3	۱۷۸۰۰	۱۹۰۳۴,۵۸	۱۹۰۵۵	۶,۸	۷,۰۵

همان گونه که مشخص است به ازای موقعیت و عمق مشخص ترک، نیروی محوری کششی سبب کاهش اثر ترک بر روی نسبت فرکانسی می‌شود.

در تیر یکسرگیردار تحت نیروی محوری، موقعیت ترک بر فرکانس طبیعی اصلی اثر می‌گذارد، با توجه به شکل ۳، هر چه موقعیت ترک به انتهای آزاد تیر نزدیکتر می‌شود، تأثیر آن بر فرکانس طبیعی اول کاهش می‌یابد.

شکل (۳-ج) نشان می‌دهد که تغییرات کاهش فرکانس طبیعی اول برای مود اول هنگامی که عمق ترک کوچک می‌شود و یا هنگامی که ترک به انتهای آزاد تیر نزدیک می‌شود، بسیار کم می‌شود، بنابراین در چنین حالتی می‌توان از اثرات ترک بر فرکانس طبیعی اول تیر صرفنظر نمود. نتیجه مشابهی با توجه به شکل‌های ۴ و ۵ که تغییرات نسبت فرکانسی دوم و نسبت فرکانسی سوم بر حسب موقعیت نسبی ترک را نشان می‌دهند، برای دو مود دیگر حاصل می‌شود. با این تفاوت که برای مود دوم، کمترین کاهش فرکانس طبیعی مربوط به ترک واقع در انتهای آزاد تیر و موقعیت $\beta^* =$ ۰/۲۲ می باشد.

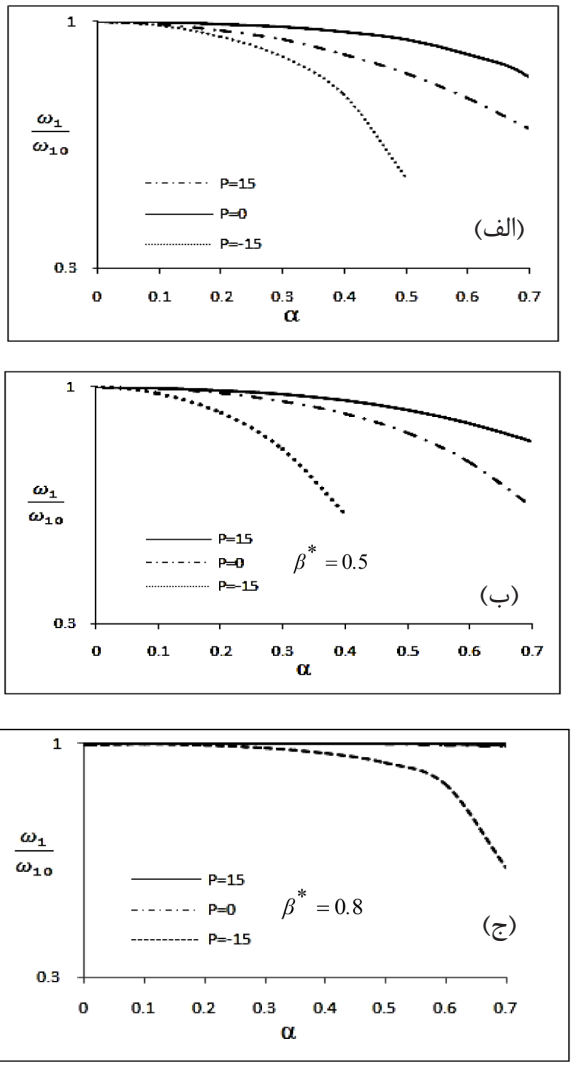
در صورتی که برای مود سوم کمترین کاهش فرکانس طبیعی مربوط به به ترک واقع در انتهای آزاد تیر و $\beta^* =$ ۰/۱۴ و $\beta^* =$ ۰/۵ است. علت این امر را می‌توان به طور اختصار بدین صورت بیان کرد که در مود اول، مشتق دوم تابع شکل مود ارتعاشی در انتهای آزاد تیر برابر صفر است، به عبارت دیگر گشتاور خمشی ایجاد شده در اثر ارتعاش تیر در مودهای دوم و سوم در نقاط مذکور صفر است و با توجه با این که عمده‌ترین عامل کاهش فرکانس‌های طبیعی ناشی از ترک، در اثر گشتاور خمشی می‌باشد، بنابراین در مود ارتعاشی اول هر چه موقعیت ترک به انتهای آزاد تیر نزدیک می‌شود اثر آن بر فرکانس طبیعی اول کاهش می‌یابد. در مود ارتعاشی دوم علاوه بر این که در انتهای آزاد تیر گشتاور خمشی وجود ندارد، موقعیت ۰/۲۲ نقطه عطف تابع شکل مود ارتعاشی است، در حالی که در مود سوم علاوه بر انتهای تیر، در موقعیت‌های ۰/۱۴ و ۰/۵ نقاط عطف در تابع شکل مود حاصل می‌شوند.

۶- تبیین مسأله معکوس برای عیب‌یابی

مسأله ترک‌یابی برای حالت‌های مختلف اندازه و موقعیت ترک ارزیابی شده است. در حل معکوس برای شناسایی ترک از سه فرکانس طبیعی اول تیر که از نتایج تجربی به دست می‌آیند، به عنوان ورودی مسأله استفاده می‌شود.

جدول ۳: فرکانس‌های طبیعی تیر تیموشنکو ترک‌دار تحت نیروی محوری به دست آمده از مدل ارائه شده و مقایسه آن با نتایج ارائه شده در مرجع [۲۲]

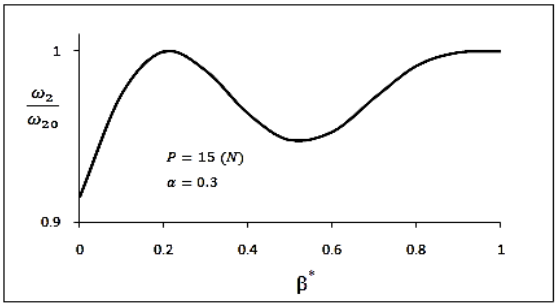
نیرو $P(N)$	موقعیت نسبی β^*	عمق نسبی α	فرکانس های طبیعی (Hz)						خطا (%)		
			نتایج تحلیلی			نتایج مرجع [۲۲]					
			f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3
۱۵	۰,۳	۰,۳	۴۵,۸	۲۳۳,۲	۶۰۰,۵	۴۶,۰	۲۲۵	۵۹۲,۸	۰,۴۱	۳,۵۱	۱,۳۰
۰	۰,۳	۰,۳	۳۵,۰	۲۲۳,۱	۵۸۸,۴	۳۴,۱	۲۱۵,۲	۵۷۱,۲	۲,۶۰	۳,۶۷	۳,۰۱
۱۵	۰,۵	۰,۳	۴۶,۶	۲۲۶,۵	۶۲۷,۱	۴۶,۸	۲۲۴,۳	۶۱۴,۴	۰,۴۳	۱,۰۰	۲,۰۷
۰	۰,۵	۰,۳	۳۶,۰	۲۱۲,۷	۶۱۵,۴	۳۵,۲	۲۱۴,۳	۵۹۲,۶	۲,۲۷	۰,۷۵	۳,۸۱
۱۵	۰,۵	۰,۵	۴۶,۱	۲۰۳,۸	۶۲۶,۹	۴۶,۸	۲۱۷,۱	۶۱۴,۳	۱,۵۰	۶,۱۲	۲,۳۹
۰	۰,۵	۰,۵	۳۴,۶	۲۱۲,۴	۶۱۵,۴	۳۴,۹	۲۰۷,۰	۵۹۲,۵	۰,۸۷	۲,۵۶	۳,۸۷
۱۵	۰,۸	۰,۳	۴۶,۷	۲۳۶,۲	۶۰۱,۲	۴۶,۸	۲۲۶,۰	۵۹۴,۵	۰,۲۰	۴,۵۱	۱,۱۲
۰	۰,۸	۰,۳	۳۶,۵	۲۲۳,۰	۵۸۸,۴	۳۵,۳	۲۱۵,۴	۵۷۲,۲	۳,۴۰	۳,۵۳	۲,۸۱



شکل ۳: تغییرات نسبت فرکانسی اول برحسب عمق نسبی ترک به ازای مقادیر مختلف نیروی محوری و موقعیت‌های نسبی ترک

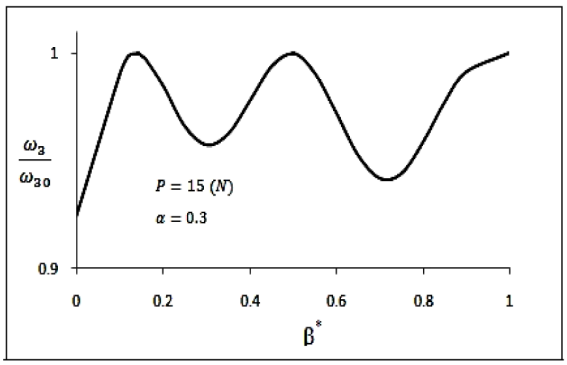
با معلوم بودن فرکانس‌های طبیعی با استفاده از رابطه ۳۲ نمودار تغییرات سفتی موضعی بی‌بعد بر حسب متغیر موقعیت نسبی ترک را در سه مود فرکانسی رسم می‌کنیم. محل تلاقی این سه منحنی موقعیت نسبی و سفتی بی‌بُعد متناظر با ترک را در اختیار می‌گذارند. با معلوم بودن مقدار k_t و ارتباط آن با عمق ترک که در رابطه (۱) بیان شده است، می‌توان عمق ترک را به دست آورد. اگر در رسم منحنی‌های مذکور از فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده با استفاده از تئوری ارائه شده استفاده شود در این صورت این سه منحنی دقیقاً در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. اما همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود بین فرکانس‌های تحلیلی و فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از تست‌های تجربی اختلاف وجود دارد که این اختلاف سبب می‌شود منحنی‌های $k-\beta$ دقیقاً در یک نقطه همدیگر را قطع نکنند، لذا از مقدار میانگین k و β برای به دست آوردن موقعیت و سفتی موضعی بی‌بُعد متناظر ترک استفاده می‌کنیم.

به منظور مقایسه نتایج مدل ارائه شده با نتایج موجود، از تیر یکسرگیردار

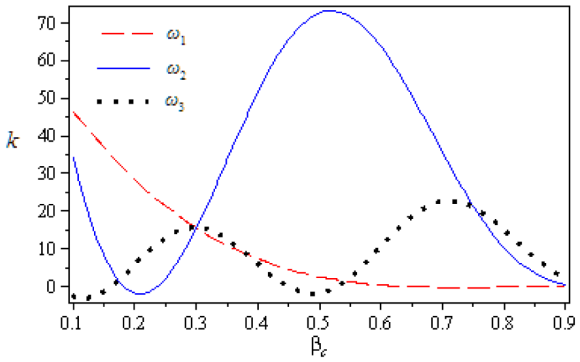


شکل ۴: تغییرات نسبت فرکانسی دوم برحسب موقعیت نسبی ترک

تحت نیروی محوری که مشخصات آن در جدول ۱ ذکر شده است، استفاده می‌کنیم. بر طبق مرجع [۲۲] در سه نمونه از این تیر، ترکی به عمق نسبی ۰/۳ و در موقعیت‌های نسبی ۰/۳ و ۰/۵ و ۰/۸ از ابتدای آن ایجاد شده است. فرکانس‌های طبیعی این نمونه‌ها که تحت نیروی محوری متفاوت قرار گرفته و از مرجع [۲۲] به دست آمده‌اند در جدول ۳ ذکر شده‌اند. منحنی تغییرات k بر حسب موقعیت نسبی ترک در سه فرکانس اول برای هر تیر ترک‌دار در شکل ۶ نشان داده شده است. مختصه‌های افقی و عمودی محل تلاقی این منحنی‌ها، به ترتیب، موقعیت نسبی ترک و مقدار سفتی موضعی بی‌بُعد ترک را مشخص می‌کنند.



شکل ۵: تغییرات نسبت فرکانسی سوم برحسب موقعیت نسبی ترک



شکل ۶: منحنی تغییرات k بر حسب موقعیت نسبی ترک در سه فرکانس اول برای تیر یکسرگیردار

جدول ۴: مقایسه نتایج تحلیلی و واقعی عمق و موقعیت ترک برای تیر نمونه دوم ذکر شده در جدول ۱

خطای عمق ترک (%)	خطای موقعیت ترک (%)	مقدار تحلیلی α	مقدار تحلیلی β^*	فرکانس های طبیعی (Hz) [۲۲]			عمق ترک α	موقعیت نسبی ترک β^*	نیرو $P(N)$
				f_1	f_2	f_3			
6.71	3.33	0.32	0.31	592.8	225.0	46.0	0.3	0.3	15
13.12	6.67	0.26	0.28	571.2	215.2	34.1	0.3	0.3	0
13.13	4.00	0.34	0.52	614.4	224.3	46.8	0.3	0.5	15
6.67	6.01	0.28	0.53	592.6	214.3	35.2	0.3	0.5	0
14.00	2.00	0.43	0.51	614.3	217.1	46.8	0.5	0.5	15
10.00	6.01	0.55	0.53	592.5	207.0	34.9	0.5	0.5	0

در جدول ۴ موقعیت و عمق ترک پیش‌بینی شده برای نمونه دوم با مقادیر واقعی که از مرجع [۲۲] استخراج شده‌اند، مورد مقایسه قرار گرفته است. حداکثر خطا در تخمین عمق ترک در بدترین شرایط ۱۴% و در پیش‌بینی موقعیت ترک به کمتر از مورد ۷% می‌باشد. نمودارهای k برحسب β در انتهای تیر به سمت صفر میل می‌کنند و در عین حال نیز باید در یک نقطه همگرا شوند. به همین دلیل خطا برای شناسایی ترکی که به اتهای آزاد تیر نزدیک می‌شود افزایش می‌یابد.

در مرجع [۱۸] که با استفاده از روش المان محدود به ترک یابی در تیر اویلر- برنولی ترک‌دار پرداخته است، حداکثر خطای مدل در تعیین عمق ترک را ۳۰% و موقعیت ترک را ۵% گزارش کرده است. همچنین در مرجع [۲۵] که بر اساس آنالیز ارتعاشی به عیب‌یابی در تیر ترک‌دار پرداخته است حداکثر خطای مربوط به تعیین عمق و موقعیت ترک در تیر یکسرگیردار را به ترتیب ۲۵% و ۱۲% گزارش شده است. با توجه به نتایج مذکور مشاهده می‌شود که پیش‌بینی عمق و موقعیت ترک با استفاده از مدل ارائه شده در مقایسه با مدل‌های مشابه، از دقت مطلوبی برخوردار است.

۷- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر رفتار ارتعاشی و ترک‌یابی در تیرهای کوتاه تحت نیروی محوری مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از این تحقیق را به اختصار می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

۱) به ازای عمق مشخص ترک، موقعیت ترک بر کاهش فرکانس‌های طبیعی اثر می‌گذارد. از آنجایی که عمده‌ترین عامل کاهش فرکانس‌های طبیعی ناشی از ترک، در اثر گشتاور خمشی می‌باشد لذا در موقعیت‌هایی که مقدار گشتاور خمشی به صفر میل می‌کند اثر ترک بر فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. در تیر یکسرگیردار ترک‌دار کمترین کاهش فرکانسی در مود اول مربوط به ترک واقع در انتهای آزاد تیر، در مود دوم مربوط به ترک واقع در موقعیت‌های انتهای آزاد تیر و $\beta^* = ۰/۲۲$ و در شکل مود سوم مربوط به ترک واقع موقعیت‌های انتهای آزاد تیر، $\beta^* = ۰/۱۴$ و $\beta^* = ۰/۵$ می‌باشد که در نقاط مذکور مقدار گشتاور خمشی برابر صفر است.

۲) وجود ترک باعث کاهش سفتی موضعی تیر می‌شود و در یک موقعیت مشخص، ترک با عمق بیشتر تأثیر بیشتری بر مشخصه‌های ارتعاشی نسبت به ترک با عمق کمتر دارد.

۳) به ازای عمق و موقعیت مشخص ترک، نیروی محوری کششی سبب کاهش اثر ترک بر نسبت فرکانسی می‌شود و همچنین نیروی کششی باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی تیر می‌شود.

۴) در مسأله معکوس حداکثر خطای مدل ارائه شده در تخمین عمق ترک در بدترین شرایط ۱۴% و در پیش‌بینی موقعیت ترک کمتر از ۷% می‌باشد.

نتایج نشان می‌دهند که استفاده از مدل ارائه شده ضمن این که به اطلاعات کمی از رفتار ارتعاشی سازه نیاز دارد در مقایسه با مدل‌های مشابه از دقت مطلوبی برخوردار است.

۸- مراجع

[1] S. W. Dobeling, C. R. Farrar and M. B. Prime, “A summary review of vibration-based damage identification methods”, Shock and Vibration Digest, Vol. 30, pp. 91-105, 1998.

[2] P. Cawly and R. D. Adams, “The locations of defects in structures from measurements of natural frequencies”, Journal of Strain Analysis, Vol. 14, pp. 49-57, 1979.

[3] M. I. Friswell, J. E. T. Penny and D. A. L. Wilson, “Using vibration data and statistical measures to locate damage in structures”, the International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 9, pp.239-254, 1994.

[4] Y. Narkis, “Identification of crack location in vibrating simply supported beams”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 172, pp. 54 9-558, 1994.

[5] A. K. Pandey, M. Biswas and M. M. Samman, “Damage detection from change in curvature mode shapes”, Journal of Sound and Vibration,Vol.145, pp. 321-335, 1991.

[6] C. P. Ratcliffe, “Damage detection using a modified

Laplacian operator on mode shape data", Journal of Sound and Vibration, Vol. 204, 505-517, 1997.

[7] P. F. Rizos, N.Aspragathos and A. D. Dimarogonas, "Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam", Journal of Sound and Vibration, Vol. 138, pp. 381-388, 1990.

[8] A. K. Pandey and M. Biswas, "Damage detection in structures using change in flexibility", Journal of Sound and Vibration, Vol. 169, pp. 3-17, 1994.

[9] S. W. Doebling, L. D. Peterson and K. F. Alvin, "Estimation of reciprocal residual flexibility from experimental modal data", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 34, pp. 1678-1685, 1996.

[10] T. W. Lim, "Structural damage detection using modal test data", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 29, pp. 2271-2274, 1991.

[11] O. S. Salawu, "Detection of structural damage through changes in frequencies: a review", Engineering Structures, Vol. 19, pp. 718-723, 1997.

[12] Adams, R. D., Cawly, P., Pye, C. J., and Stone, B. J. "Vibration Techniques for Nondestructively Assessing the Integrity", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol.20 No. 2, pp. 93-100, 1978.

[13] W.M. Ostachowicz, M. Krawczuk, "Analysis of the Cracks on the Natural Frequencies of a cantilever Beam", Joutnal of Sound and Vibration, Vol. 150, No. 2, pp. 191-201, 1991.

[14] Sergio H. S. Carneiro and Daniel J. Inman, "Continuous Model for the Transverse Vibration of Cracked Timoshenko Beams", Transactions of the ASME, Vol. 124, 310-320, 2002.

[15] S. P. Lele and S. K. Maiti, "Modelling of Transverse Vibration of Short Beams for Crack Detection and Measurement of Crack Extension", Journal of Sound and Vibration, Vol. 257, No. 3, pp. 559-583, 2002.

[16] E. Douka, G. Bamnios, A. Trochidis, "a method for determining the location and depth of cracks in double-cracked beams", Applied Acoustics, Vol. 65, pp. 997–1008, 2004.

[17] B. Binici, "Vibration of beam with multiple open cracks subjected to axial force", J. of Sound and Vibration, Vol. 287, pp. 277–295, 2005.

[18] J. K. Sinha, M. I. Friswell and S. Edwards, "Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data", Journal of Sound and vibration, Vol. 251, No. 1, pp. 13-38, 2002.

[19] N. Khaji, M. Shafiei, M. Jalalpour, "Closed-form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions", International Journal of Mechanical Sciences, No. 51, pp. 667-681, 2009.

[۲۰] س. اسماعیل زاده خادم و موسی رضائی،"تعیین موقعیت و عمق ترک سرتاسری در صفحات مستطیلی با استفاده از آنالیز ارتعاشی"، مجله بین المللی علوم مهندسی، شماره دوم، جلد نهم، زمستان۱۳۷۷، صفحه ۱۷-۲۹.

[۲۱] س. اسماعیل زاده خادم، م. حاجی احمدی و موسی رضائی،"ترک یابی در لوله های ضخیم به روش آنالیز ارتعاشی"، مجله بین‌المللی علوم مهندسی، شماره ششم، جلد یازدهم، زمستان ۱۳۷۹، صفحه ۱۵۷-۱۶۵.

[22] C. Mei, Y. Karpenko, S. Moody, "analytical approach to free and forced vibrations of axially loaded cracked timoshenko beams", Journal of Sound and Vibration, Vol. 291, pp. 1041-1060, 2006.

[23] E. E. Gdoutos, "Fracture Mechanics", Kluwer Academic Publishers, 2004.

[24] T. D. Chaudhari and S. K. Maiti, "A study of vibration of geometrically segmented beams with and without cracks", International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, pp. 761-779,2000.

[25] Young-Shin Lee, Myung-Jee Chung, "A study on crack detection using eigenfrequency test data", Computers and Structures, No. 77, pp. 327-342, 2000.