

# Adjoint-Based Sensitivity Analysis of a Fixed Cross-Section Fin with Temperature-Dependent Conductivity

Behzad Baghapour<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Assistant Professor, Mechanical Engineering Department, Amirkabir University of Technology, Iran  
\* b.baghapour@aut.ac.ir

## ABSTRACT

In this paper, the sensitivity of the efficiency of a fixed cross-sectional fin with temperature-dependent thermal conductivity to various parameters is investigated using the adjoint equation. A one-dimensional steady-state formulation is assumed for both the governing energy equation and the corresponding adjoint equation. The appropriate boundary condition for a convective fin tip is derived for the adjoint variable. The energy and adjoint equations are solved numerically using a finite-difference scheme. The results indicate that a slight increase in certain parameters, such as the cross-sectional area and the base thermal conductivity, leads to an improvement in fin efficiency. In contrast, increasing parameters such as the fluid heat transfer coefficient and the fin length results in a reduction in efficiency. The slope factor in the linear thermal conductivity model exhibits a non-monotonic effect: for negative values, increasing the slope reduces fin efficiency, whereas for positive values, it enhances the efficiency. Furthermore, the Biot number defined along the fin length shows a pronounced negative influence on fin efficiency as it increases. Its most significant impact occurs around a Biot number of 0.1, corresponding to the transition from a nearly uniform temperature distribution to a regime with a pronounced internal temperature gradient.

## KEYWORDS

Sensitivity analysis, fin efficiency, temperature-dependent conductivity, adjoint equation, finite-difference method.

## 1. Introduction

With the advancement of computational sciences, particularly data-driven methods, detailed analysis of thermal system performance has become feasible at the conceptual design, final design, and optimization stages prior to manufacturing. Gradient-based approaches are widely used in sensitivity analysis, optimization, and machine learning. A major computational challenge in these methods is the evaluation of gradients of the objective function with respect to design parameters. In simulation-based engineering optimization, finite-difference perturbation is a straightforward but inefficient approach, as the objective function typically depends not only on design parameters but also on the distribution of field variables. Each parameter perturbation alters the field solution and requires repeated solution of the governing equations, leading to high computational cost.

Adjoint methods provide an efficient alternative for reducing computational expense in sensitivity analysis and optimization problems [1]. In this framework, an adjoint variable is introduced and the corresponding adjoint equation is derived and solved. The adjoint variable implicitly accounts for the dependence of the objective function on the field variables, eliminating the need to repeatedly solve the governing equations for each parameter perturbation.

Sensitivity analysis of fin efficiency is an important topic in the design and optimization of thermal systems. Recent studies have employed adjoint-based methods for optimizing heat transfer performance in finned structures [2], as well as for inverse heat transfer problems involving transient temperature estimation and parameter sensitivity analysis [3, 4]. In parallel, numerous analytical and numerical solutions have been reported for steady and transient heat conduction in fins and walls with variable thermal conductivity [5-10]. These studies demonstrate that conductivity variations, whether dependent on space or temperature, can significantly influence thermal performance and efficiency.

## 2. Methodology

Applying Fourier's law and Newton's law of cooling yields the following second-order governing equation for a fin with a linear temperature-dependent thermal conductivity model:

$$\frac{d}{dx} \left( KA_0 \frac{dT}{dx} \right) - H_0 P_0 (T - T_0) = 0 \quad (1)$$

$$K(K_0, \beta_0, T_0, T) = K_0 (1 + \beta_0 (T - T_0)) \quad (2)$$

The non-dimensional energy equation becomes:

$$F(u, u', u'') := (a + bu)u'' + bu'^2 - cu = 0 \quad (3)$$

$$u(\xi) = \frac{T - T_0}{\Delta T_0}, \quad \xi = \frac{x}{L_0} \quad (4)$$

$$a = K_0 A_0, \quad b = K_0 A_0 \beta_0 \Delta T_0, \quad c = h_0 P_0 L_0^2 \quad (5)$$

Boundary conditions at the base and tip of the fin are as follows:

$$\text{at } \xi = 0: u(0) = 1, \quad (6)$$

$$\text{at } \xi = 1: [a + bu(1)]u'(1) + du(1) = 0$$

where  $d = h_0 A_0 L_0$  is another parameter. In Eqs. (3)–(6),  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , and  $d$  denote grouped parameters.

The fin efficiency is considered as the objective function in adjoint sensitivity analysis as follows:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{q_f}{q_{\max}} = \frac{-K_0 A_0 (1 + \beta_0 T(0)) T'(0)}{h_0 A_f (T(0) - T_0)} \\ &= - \left( \frac{a + b}{c + d} \right) u'(0) \end{aligned} \quad (7)$$

As indicated in Eq. (7), the fin efficiency depends on both the grouped parameters and the temperature gradient at the base. This gradient, in turn, depends on the internal temperature distribution, which must satisfy the energy conservation Eq. (3). Therefore, we are dealing with a sensitivity problem constrained by the governing physics. A basic approach would require solving the perturbed energy equation once for each parameter to obtain the derivatives of the objective function.

By solving the adjoint equation just once, we can obtain the derivatives of the objective function with respect to all parameters, leading to a significant reduction in computational cost. Fig. 1 presents a schematic of the problem, which includes the effective parameters listed in Table 1.

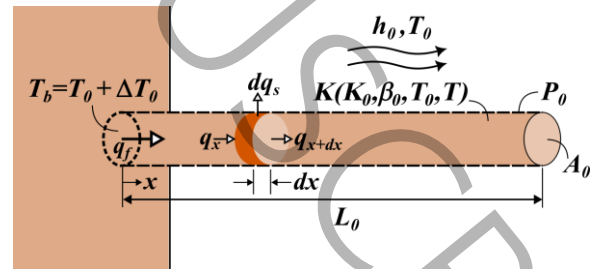


Fig. 1. Schematic of the problem.

The adjoint problem is derived using the grouped parameters in Table 1. The sensitivities with respect to the effective parameters are then computed via the chain rule from these grouped parameters.

**Table 1. The effective and grouped parameters.**

Effective parameters ( $p$ )	Grouped parameters ( $q$ )
$A_0$ [m <sup>2</sup> ] (Fin cross-section area)	$a = K_0 A_0$
$P_0$ [m] (Fin perimeter)	$b = K_0 A_0 \beta_0 \Delta T_0$
$K_0$ [W/mK] (Reference thermal conductivity)	$c = h_0 P_0 L_0^2$
$h_0$ [W/m <sup>2</sup> K] (Heat transfer coefficient)	$d = h_0 A_0 L_0$
$\beta_0$ [K <sup>-1</sup> ] (Conductivity slope)	Biot number along the fin:
$\Delta T_0$ [K] (Temperature difference between base and tip)	$Bi_L = \frac{H_0 L_0}{K_0 (1 + \beta_0 \Delta T_0)}$

The adjoint equation and its boundary conditions are given as follows:

$$(a + bu) \lambda'' - c\lambda = 0 \quad (8)$$

$$\lambda(0) = -\frac{1}{c + d} \quad (9)$$

$$(a + bu(1))\lambda'_p(1) + d\lambda_p(1) = 0 \quad (10)$$

After solving the adjoint problem, the sensitivities to the grouped parameters are given by:

$$\delta Q_p = \eta_p + \int_0^1 \lambda F_p d\xi \quad (11)$$

After computing the sensitivities with respect to the effective parameters, the variation in fin efficiency due to each parameter is found by multiplying its sensitivity by a chosen standard deviation. In this work, a 10% deviation from the reference value is used for each parameter.

### 3. Results and discussion

Fig. 2(a) shows the effect of the conductivity slope ( $\beta_0$ ) on fin efficiency. As shown, efficiency increases with  $\beta_0$ . This is because a larger  $\beta_0$  leads to a more uniform temperature distribution within the fin, as indicated by Eq. (2), reducing the overall temperature drop due to fin resistance and thereby improving efficiency.

Fig. 2(b) shows variations in fin efficiency corresponding to a 10% increase in each effective parameter. According to the figure, increasing the reference thermal conductivity or fin cross-sectional area consistently improves efficiency, whereas increasing the fin perimeter or fluid heat transfer coefficient reduces efficiency across all  $\beta_0$  values.

However, the effect of  $\beta_0$  itself differs: for  $\beta_0 < 0$ , increasing  $\beta_0$  reduces efficiency, while for  $\beta_0 > 0$ , it improves efficiency. In this regard, the effect of the base-to-fluid temperature difference ( $\Delta T_0$ ) on efficiency is qualitatively similar to that of  $\beta_0$ .

Fig. 3(a) shows that as the Biot number along the fin increases, the efficiency decreases. Higher conductivity

slope values only slightly mitigate this effect. This is because the Biot number increases with a larger heat transfer coefficient, longer fin length, or lower reference conductivity, which raises the ratio of conductive to convective resistance. Fig. 3(b) emphasizes this effect by showing the negative impact of increases in these parameters on efficiency.

Moreover, Fig. 3(b) reveals that the maximum negative effect on fin efficiency occurs near a Biot number of 0.1, where the fin transitions from a thermally lumped condition toward a non-uniform temperature distribution. This highlights the important role of the lumped condition in fin design. Finally, the figure shows that a 10% increase in Bi near this transition region reduces fin efficiency by approximately 12%.

In terms of computational efficiency, the adjoint method significantly reduces cost compared to the basic perturbation approach for calculating sensitivities. In this study, using a single thread of a Core i7-6700HQ CPU, the adjoint method achieved a speedup of up to 4.33x over the finite-difference approach at the higher grid resolutions.

### 4. Conclusion

This study analyzed the sensitivity of a fixed cross-section fin with temperature-dependent conductivity to its effective parameters using an adjoint method. These parameters include geometric properties (length, cross-sectional area, perimeter) and thermal conditions (heat transfer coefficient, reference conductivity, conductivity slope, and base-to-fluid temperature difference). While parameters such as reference conductivity and cross-sectional area positively affect efficiency, others like the heat transfer coefficient and perimeter have a negative impact. The temperature difference and conductivity slope exhibit a dual effect. The Biot number significantly reduces efficiency, with its maximum effect occurring near  $Bi = 0.1$ . Computationally, the adjoint method achieved approximately a fourfold speedup over conventional approaches.

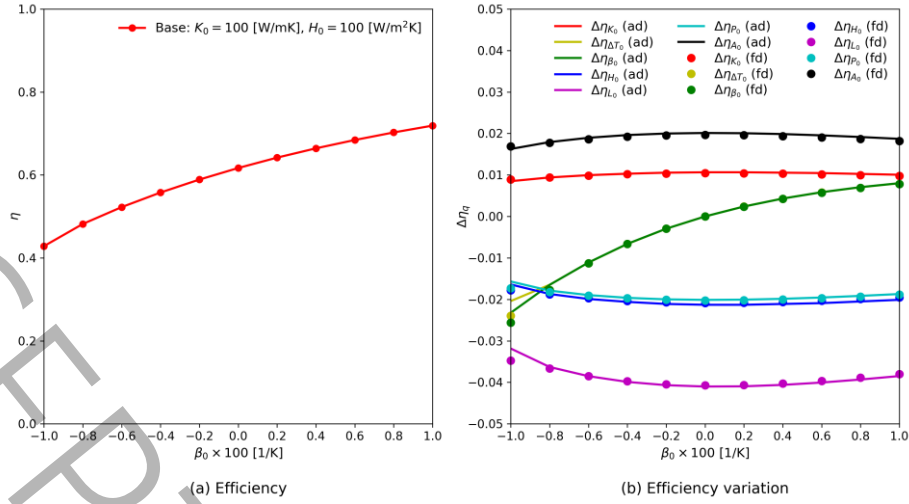


Fig. 2. Variation in fin efficiency due to a  $\pm 10\%$  change in effective parameters.

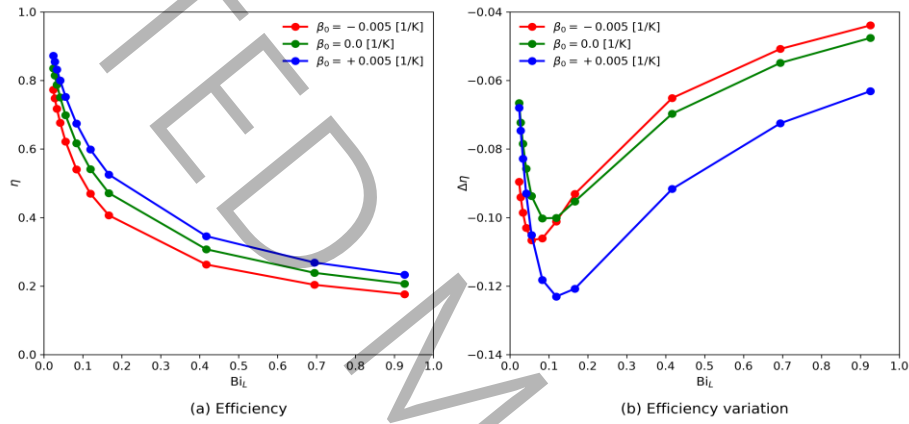


Fig. 3. Sensitivity of fin efficiency to a 10% change in Biot number.

## 5. References

- [1] R.G. McClarren, P. McClarren, R. Penrose, Uncertainty quantification and predictive computational science, 2018.
- [2] N.P. Nguyen, E. Maghsoudi, S.N. Roberts, B. Kwon, Designing pin fin heat sinks with restarting adjoint optimization approach, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 242 (2025) 126856.
- [3] P. Jaksch, Implementation of an adjoint thermal solver for inverse problems, in: 12th European Conference on Turbomachinery Fluid dynamics & Thermodynamics, EUROPEAN TURBOMACHINERY SOCIETY, 2017.
- [4] Y. Jarny, M. Ozisik, J. Bardou, A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction, *International journal of heat and mass transfer*, 34(11) (1991) 2911–2919.
- [5] W. Khan, A. Aziz, Transient heat transfer in a functionally graded convecting longitudinal fin, *Heat and Mass Transfer*, 48(10) (2012) 1745–1753.
- [6] E. Dowty, D. Haworth, Generalized solutions for transient heat conduction with variable conductivity, *Nuclear Engineering and Design*, 6(1) (1967) 57–64.

- [7] J. Yu, C. An, Y. He, J. Su, Transient nonlinear heat conduction in a slab with temperature-dependent thermal conductivity: Integral transform and lumped model solutions, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 158 (2024) 107886.
- [8] M. Dehghan, M.S. Valipour, S. Saedodin, Temperature-dependent conductivity in forced convection of heat exchangers filled with porous media: a perturbation solution, *Energy Conversion and Management*, 91 (2015) 259–266.
- [9] A. Moradi, H. Ahmadikia, Analytical solution for different profiles of fin with temperature-dependent thermal conductivity, *Mathematical Problems in Engineering*, 2010(1) (2010) 568263.
- [10] A. Gholami, F. Pourfayaz, Comprehensive Sensitivity Analysis of Carbon Nanoparticles-Enhanced PCMs' Thermal Conductivity, *Mechanical Engineering*, 25(03) (2025) 137–146.

# آنالیز حساسیت فین مقطع- ثابت با ضریب هدایت وابسته به دما به کمک معادله الحاقی

بهزاد بقاپور<sup>۱\*</sup>

۱- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران، b.baghapour@aut.ac.ir

## چکیده

در این مقاله، اثر پارامترهای هندسی، ضریب هدایت وابسته به دما، ضریب انتقال حرارت جابجایی، و اختلاف دمای پایه و سیال در بازده حرارتی یک فین مقطع-ثابت بررسی می‌گردد. از آنالیز حساسیت الحاقی استفاده می‌شود. معادله پایستگی انرژی در حالت پایا و یک بعدی در نظر گرفته شده و معادله الحاقی متناسب تشکیل می‌شود. شرایط مرزی برای حل معادله الحاقی بر اساس دمای پایه فین و جابجایی در نوک فین معرفی می‌شوند. ضریب هدایت جسم بصورت یک مدل خطی نسبت به دما لحاظ می‌شود. معادلات پایستگی انرژی و الحاقی با استفاده از گسسته‌سازی تفاضل-محدود حل می‌شوند. تابع هدف بازدهی حرارتی فین است. تغییرات آن برای محدوده گسترده‌ای از پارامترهای مؤثر بررسی خواهد شد. نتایج نشان می‌دهند که افزایش جزئی برخی از پارامترها مانند سطح مقطع فین و ضریب هدایت مرجع نقش مثبتی در بازدهی فین داشته، حال آنکه پارامترهای دیگر مانند طول فین، محیط پیرامون فین، اختلاف دمای پایه و سیال، و ضریب جابجایی سیال، نقش منفی در بازدهی فین دارند. مقدار شیب تغییرات ضریب هدایت در مدل خطی، نقش دوگانه‌ای در بازدهی داشته، بگونه‌ای که مقادیر مثبت آن در بهبود بازدهی مؤثر بوده و مقادیر منفی آن باعث کاهش بازدهی فین می‌شود. همچنین، عدد پایو (در راستای فین)، به عنوان یک پارامتر ترکیبی بی‌بعد، نقش منفی اما قابل توجهی در بازدهی فین داشته بگونه‌ای که اثر آن در نزدیکی مقدار  $0/1$  بیشینه است.

## کلمات کلیدی

آنالیز حساسیت، بازده فین، هدایت وابسته به دما، معادله الحاقی، روش تفاضل-محدود.

امروزه با گسترش علوم محاسباتی، به‌ویژه روش‌های داده-محور، امکان تحلیل کامل تجهیزات گرمایی شامل طراحی مفهومی، طراحی دقیق و بهینه‌سازی فراهم شده است. روش‌های داده-محور ابزاری پرکاربرد در آنالیز حساسیت و بهینه‌سازی محسوب می‌شوند. در این روش‌ها، عملیات ریاضی اصلی مربوط به محاسبه گرادیان تابع هدف نسبت به پارامترهای مسئله است. در یک رویکرد ابتدایی، گرادیان تابع هدف با ایجاد اغتشاش کوچک در پارامترهای مؤثر و استفاده از تفاضل محدود محاسبه می‌گردد. حال آن که اثر توزیع متغیرهای میدان (مانند دما، فشار و سرعت) از طریق مشتقات جزئی وارد تابع هدف می‌شود. در نتیجه، هر اغتشاش در پارامترهای مسئله، بر توزیع متغیرهای میدان اثر گذاشته و به ازای آن می‌بایست معادلات حاکم دوباره حل شوند. این امر باعث افزایش قابل توجه حجم محاسبات در روش تفاضل-محدود می‌شود.

روش‌های الحاقی<sup>۱</sup> رهیافت مناسبی برای کاهش حجم محاسبات در آنالیز حساسیت و بهینه‌سازی هستند [۱]. با داشتن معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسئله و شرایط مرزی و اولیه، معادله الحاقی از انتقال مشتق متغیرهای اصلی به مشتق متغیر الحاقی ساخته می‌شود. با حل معادله الحاقی، توزیع متغیر الحاقی درون میدان بدست آمده که بصورت غیر مستقیم وابستگی تابع هدف به متغیرهای میدان را لحاظ می‌نماید. بنابراین، با افزودن متغیر الحاقی به تابع هدف، نیاز به حل مجدد معادلات حاکم به ازای اغتشاش در هر پارامتر مسئله برطرف می‌گردد.

آنالیز حساسیت در بازدهی فین‌ها یکی از موضوعات مورد توجه در طراحی و بهینه‌سازی سامانه‌های گرمایی است. در جدیدترین پژوهش در این زمینه، انگوین و همکاران<sup>۲</sup> [۲] روشی مبتنی بر معادله الحاقی با شروع مجدد برای بهینه‌سازی نرخ انتقال حرارت و افت فشار در مجموعه فین‌های سوزنی ارائه نموده‌اند. برای محاسبه متغیرهای میدان شامل توزیع دما درون فین‌ها، سرعت، فشار، و دمای سیال، از دینامیک سیالات محاسباتی استفاده شده است. شکل فین‌ها بهینه‌سازی شده تا مقاومت حرارتی آنها کاهش یابد. روش الحاقی برای مسائل انتقال حرارت معکوس نیز کاربرد ویژه‌ای دارد. برای نمونه، جکش<sup>۳</sup> [۳] از معادله الحاقی برای پیش‌بینی توزیع دمای گذرا در فین و آنالیز حساسیت آن نسبت به پارامترهای مسئله پرداخته است. تابع هدف بصورت مربعات خطا بین مقادیر پیش‌بینی و اندازه‌گیری شده در مکان‌ها و زمان‌های مشخص تعریف شده و با کمک متغیر الحاقی میزان مربعات خطا کمینه می‌گردد. همچنین، الگوریتم بکارگیری معادلات الحاقی در تحلیل مسائل هدایت معکوس توسط جارنی و همکاران<sup>۴</sup> [۴] ارائه شده است.

حل‌های تحلیلی و عددی متعددی برای توزیع دمای حالت پایا و گذرا در دیواره‌ها و فین‌ها با ضریب هدایت متغیر ارائه شده است. از جمله این موارد، می‌توان به کار خان و عزیز<sup>۵</sup> [۵] اشاره نمود. در این مقاله، حل عددی برای حالت گذرا و حل تحلیلی برای حالت پایا در فین‌ها با ضریب هدایت وابسته به مکان ارائه شده است. در حالت پایا، توزیع دما در فین با ضریب هدایت خطی بصورت ترکیبی از توابع بسل است. همچنین، توزیع دما با ضریب هدایت درجه دو و نمایی، به ترتیب، بصورت ترکیبی از توابع لژاندر و گاما، و بسل توسعه‌یافته است. خان و عزیز نشان دادند که در ضرایب جابجایی پایین و هدایت متوسط بالا، فین با ضریب هدایت وابسته به مکان دارای کارایی بالاتری نسبت به فین ساده است. در خصوص دیواره با ضریب هدایت وابسته به دما می‌توان به کار عددی پایه‌ای دوتی و هاورت<sup>۶</sup> [۶] اشاره نمود. آنان جداول هاسلر<sup>۶</sup> برای تغییر دمای گذرای بی‌بعد برای یک دیواره با ضریب هدایت خطی نسبت به دما ارائه داده و اثر شیب تغییرات هدایت نسبت به دما را بررسی نمودند.

به عنوان یک پژوهش جدید، یو و همکاران<sup>۷</sup> [۷] اثر وابستگی ضریب هدایت جسم به دما را در یک دیواره با روش توسعه‌یافته نگاشت انتگرالی<sup>۸</sup> مورد بررسی قرار داده‌اند. همچنین، دهقان و همکاران [۸] از روش اختلالات جزئی<sup>۹</sup> برای بررسی اثر وابستگی هدایت حرارتی به دما در یک محیط متخلخل با انتقال حرارت جابجایی اجباری پرداخته‌اند.

<sup>1</sup> Adjoint

<sup>2</sup> Nguyen et al.

<sup>3</sup> Jaksch

<sup>4</sup> Jarny et al.

<sup>5</sup> Dowty and Haworth

<sup>6</sup> Heisler

<sup>7</sup> Yu et al.

از جمله روش‌های داده-محور در آنالیز حساسیت گرمایی می‌توان به کار غلامی و پورفیاض [۹] اشاره نمود. هدف اصلی در این پژوهش، آنالیز حساسیت در بهبود ضریب هدایت مواد تغییرافزاینده در اثر افزودن نانوذرات کربن بوده است. آنالیز مربوطه به کمک روش سطح پاسخ<sup>۱۰</sup> و تحلیل واریانس بر داده‌های تجربی انجام شده است. تحلیل مربوطه نشان داده که پارامترهای اصلی در بهبود ضریب رسانش گرمایی مجموعه، شامل غلظت نانوذرات افزوده شده و برهم‌کنش ذرات بر ماده تغییرافزاینده در دو فاز جامد و مایع هستند.

در خصوص استفاده از فناوری‌های جدید ساخت همراه با معادله الحاقی برای بهینه‌سازی گرمایی می‌توان به کار ریکار و همکاران<sup>۱۱</sup> [۱۰] اشاره نمود. این مقاله به ارائه یک چارچوب بهینه‌سازی شکل برای دفع‌کننده‌های گرمایی<sup>۱۲</sup> سه‌بعدی با استفاده از روش الحاقی و پارامتردهی مبتنی بر طراحی به‌کمک رایانه<sup>۱۳</sup> می‌پردازد. هدف اصلی، بهبود هم‌زمان انتقال حرارت و کاهش افت فشار در دفع‌کننده گرمایی بوده که توسط آب همراه با فین‌های پین‌مانند خنک می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که طراحی بهینه منجر به شکل‌های غیرمتعارف فین با سطح مقطع بزرگ‌تر در ناحیه پایه و باریک‌تر در بخش میانی شده که باعث افزایش ضریب انتقال حرارت (حدود ۰.۲۴٪) و کاهش افت فشار (حدود ۰.۱۹٪) می‌شود.

در مقاله‌ای دیگر، فوکس و همکاران<sup>۱۴</sup> [۱۱] از روش الحاقی برای بهینه‌سازی شکل فین‌های مبدل حرارتی استفاده نموده و سپس به اعتبارسنجی تجربی نتایج پرداخته‌اند. ابتدا یک چارچوب عددی مبتنی بر شبیه‌سازی دینامیک سیالات محاسباتی و روش گرادیانی برای بهینه‌سازی هم‌زمان انتقال حرارت و افت فشار توسعه داده شده است. هندسه‌های بهینه برای فین‌ها به دست آمده و طرح‌های بهینه با استفاده از ساخت افزایشی تولید و به صورت آزمایشگاهی مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. نتایج نشان می‌دهد که بهینه‌سازی مبتنی بر روش الحاقی می‌تواند به بهبود قابل توجه عملکرد حرارتی-هیدرولیکی مبدل حرارتی منجر شود و در عین حال تطابق خوبی بین نتایج عددی و آزمایشگاهی وجود دارد.

در خصوص اثر وابستگی ضریب هدایت به دما در فین‌ها، می‌توان به کار مرادی و احمدی‌کیا [۱۲] اشاره نمود. آنان با استفاده از روش نگاشت دیفرانسیلی<sup>۱۵</sup>، حل نیمه-تحلیلی برای توزیع دما درون فین مستقیم با پروفیل مستطیلی، محدب و نمایی، همراه با رابطه بازدهی فین ارائه نمودند. آنان نشان دادند که روش نگاشت دیفرانسیلی در مسئله مذکور دارای همگرایی سریع بوده و به خوبی با نتایج عددی مطابقت دارد. در ادامه، قاسمی و همکاران [۱۳] از روش نگاشت دیفرانسیلی برای یافتن توزیع دما درون فین با ضریب هدایت چشمه حرارتی وابسته به دما استفاده نمودند.

بررسی پژوهش‌های اخیر نشان می‌دهد که روش الحاقی جایگاه ویژه‌ای در فرآیند طراحی و ساخت سامانه‌های گرمایی یافته است. دلیل این امر، افزایش سرعت تحلیل و دقت محاسبات در این روش نسبت به سایر روش‌های پایه‌ای آنالیز حساسیت و بهینه‌سازی است. بر خلاف روش‌های مرسوم آماری، در روش الحاقی، خصوصیات فیزیکی و هندسی مسئله از طریق معادلات دقیق دیفرانسیلی به همراه اعمال مستقیم شرایط مرزی لحاظ می‌گردد که این امر می‌تواند پیش‌بینی‌های مطمئن‌تری را ایجاد نماید. در این راستا، انجام پژوهش‌های جدید در مسائل مهندسی، که علاوه بر متغیرهای هندسی و پایستاری، خواص مواد نیز در آنها تغییر نماید، می‌تواند قابلیت‌های روش الحاقی را نمایان‌تر کند.

در این پژوهش، به کمک معادله الحاقی، حساسیت بازده فین با ضریب هدایت وابسته به دما بررسی می‌شود. اثر پارامترهایی مانند شیب و ضریب هدایت مرجع مدل خطی، ضریب جابجایی، سطح مقطع و محیط در بازده فین تحلیل می‌گردد. از اثر تابش صرف‌نظر شده و مسئله پایا است. نتایج با حل تحلیلی فین با ضریب هدایت ثابت مقایسه و اثر وابستگی ضریب هدایت به دما بررسی می‌گردد.

<sup>8</sup> Generalized integral transform

<sup>9</sup> Perturbation solution

<sup>10</sup> Response Surface Method

<sup>11</sup> Raikar et al.

<sup>12</sup> Heat sinks

<sup>13</sup> Computer-Aided Design (CAD)

<sup>14</sup> Fuchs et al.

<sup>15</sup> Differential transformation method

## ۲- روش تحلیل

### ۲-۱- معادله پایستگی انرژی

موازنه انرژی برای یک فین مستقیم و مقطع-ثابت همراه با شرایط مرزی در شکل ۱ نشان داده شده است. در این شکل، پارامترها با زیرنویس صفر، پارامترهای مؤثر برای تحلیل بازدهی فین هستند. شرط پایه و نوک فین، به ترتیب، جابجایی و دما معلوم است. ضریب هدایت حرارتی بصورت خطی با مقدار مرجع  $K_0$ ، در دمای مرجع  $T_r = T_0$ ، با شیب تغییرات  $\beta_0$ ، بصورت زیر تعریف می‌گردد [۶]:

$$K(K_0, \beta_0, T_0, T) = K_0(1 + \beta_0(T - T_0)) \quad (۱)$$

موازنه انرژی برای المان شکل ۱، منجر به یافتن معادله پایستگی انرژی برای فین خواهد شد:

$$q_x - q_{x+dx} = dq_s \quad (۲)$$

با اعمال قانون فوریه برای شار هدایت و قانون سرمایه‌ش نیوتن برای شار جابجایی، و همچنین، تقریب خطی تغییرات شار هدایتی درون جسم، رابطه دیفرانسیلی مرتبه دو بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{d}{dx} \left( KA_0 \frac{dT}{dx} \right) - H_0 P_0 (T - T_0) = 0 \quad (۳)$$

با فرض ثابت بودن سطح مقطع و ضریب انتقال حرارت و لحاظ نمودن رابطه (۱) برای ضریب هدایت در معادله (۳)، خواهیم داشت:

$$A_0 \left[ K_0(1 + \beta_0(T - T_0)) \frac{d^2 T}{dx^2} + \beta_0 K_0 \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 \right] - h_0 P_0 (T - T_0) = 0 \quad (۴)$$

پس از بی‌بعدسازی دما، معادله (۴)، می‌توان معادله پایستگی انرژی را به صورت یک معادله دیفرانسیل پارامتری بیان نمود:

$$F(u, u', u'') := (a + bu)u'' + bu'^2 - cu = 0 \quad (۵)$$

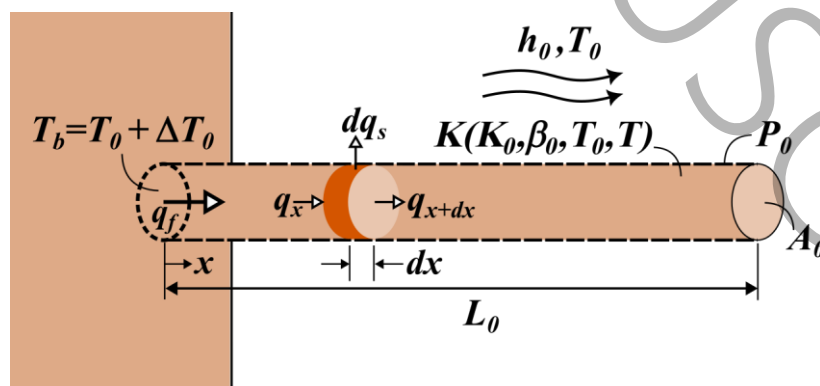
$$u(\xi) = \frac{T - T_0}{\Delta T_0}, \quad \xi = \frac{x}{L_0} \quad (۶)$$

$$a = K_0 A_0, \quad b = K_0 A_0 \beta_0 \Delta T_0, \quad c = h_0 P_0 L_0^2 \quad (۷)$$

در رابطه (۵)  $u' = du/d\xi$ ،  $u'' = d^2u/d\xi^2$  هستند. شرط مرزی در پایه و نوک نیز بصورت زیر است:

$$\text{at } \xi = 0: u(0) = 1, \quad \text{at } \xi = 1: [a + bu(1)]u'(1) + du(1) = 0 \quad (۸)$$

شرط مرزی در نوک از موازنه انرژی سطح مشترک فین و سیال بصورت  $h_0(T|_{x=L_0} - T_0) = -[K(T)dT/dx]_{x=L_0}$  حاصل شده و پارامتر  $d = h_0 A_0 L_0$  نیز یکی دیگر از پارامترهای گروهی محسوب می‌شود.



شکل ۱: شماتیک موازنه انرژی برای یک فین مقطع-ثابت با هدایت وابسته به دما به همراه پارامترهای مؤثر

Fig. 1. Schematic of the energy balance for a fixed cross-section fin with temperature-dependent conductivity and effective parameters

رابطه (۵) با شرایط مرزی (۸)، مسئله اصلی در آنالیز حساسیت محسوب می‌شود. جدول ۱، پارامترهای مورد مطالعه را گزارش می‌کند. معادله الحاقی برای پارامترهای ترکیبی ارائه شده و تحلیل حساسیت برای پارامترهای مؤثر از طریق مشتقات زنجیره‌ای انجام می‌شود.

جدول ۱: پارامترهای مؤثر و پارامترهای ترکیبی در معادلات و شرایط مرزی

Table 1. Effective and combined parameters in equations and boundary conditions

پارامترهای مؤثر (q)	پارامترهای ترکیبی (p)
$A_0$ [m <sup>2</sup> ] (مساحت سطح مقطع فین)	$a = K_0 A_0$
$P_0$ [m] (محیط اطراف فین)	$b = K_0 A_0 \beta_0 \Delta T_0$
$L_0$ [m] (طول فین)	$c = h_0 P_0 L_0^2$
$K_0$ [W/mK] (ضریب هدایت جسم در دمای مرجع)	$d = h_0 A_0 L_0$
$h_0$ [W/m <sup>2</sup> K] (ضریب جابجایی سیال)	پارامترهای ترکیبی فوق دارای بعد [Wm/K] هستند.
$\beta_0$ [K <sup>-1</sup> ] (شیب تغییرات هدایت جسم بر حسب دما)	عدد بایو در راستای فین:
$\Delta T_0$ [K] (اختلاف دمای پایه فین و سیال)	$Bi_L = \frac{H_0 L_0}{K_0 (1 + \beta_0 \Delta T_0)}$

۲-۲- معادله الحاقی

برای تحلیل اثر پارامترها، در ابتدا نیاز است تابع هدف انتخاب شود. بازده فین به عنوان تابع هدف انتخاب می‌شود [۱۴]:

$$\eta = \frac{q_f}{q_{\max}} = \frac{-A_0 (K dT/dx)_{x=0}}{H_0 A_f (T|_{x=0} - T_0)} = \frac{-K_0 A_0 (1 + \beta_0 \Delta T_0) T'(0)}{H_0 A_f \Delta T_0} = -\left(\frac{a+b}{c+d}\right) u'(0) \quad (9)$$

رابطه (۹) نشان می‌دهد که بازده، متأثر از پارامترهای جدول ۱ و مشتق دما در پایه فین است. مشتق دما در پایه فین، خود وابسته به توزیع دما درون فین است. توزیع دما نیز مقید به قانون پایستگی انرژی است. بنابراین، تحلیل تغییرات بازده، یک آنالیز حساسیت مقید است. برای لحاظ نمودن قید ناشی از پایستگی انرژی، تابع هدف تعمیمی یافته از روش ضرایب لاگرانژ تعریف می‌شود:

$$Q = \eta + \int_0^1 \lambda F d\xi \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)، تغییرات تابع هدف با تغییرات بازده برابر است، یعنی  $\delta\eta = \delta Q$ ، زیرا که به دلیل پایستگی انرژی،  $F = 0$  است. تغییرات کل، ناشی از پارامترها و ویژگی‌های میدان دما، از رابطه (۱۰)، بصورت زیر بیان می‌گردد [۱۵]:

$$\delta Q_p = \delta\eta_p + \int_0^1 \lambda (\delta F_p) d\xi \quad (11)$$

جمله  $\delta\eta_p$ ، تغییرات جزئی بازده نسبت به پارامترها در میدان دمای ثابت را نشان می‌دهد. از آنجاکه  $\eta = \eta(p, u'(0))$  داریم:

$$\delta\eta_p = \eta_p + \eta_{u'(0)} \delta u'_p(0) = \eta_p - \left(\frac{a+b}{c+d}\right) \delta u'_p(0) \quad (12)$$

همچنین، در رابطه (۱۱)، تغییرات در معادله پایستگی انرژی  $F(p, u, u', u'')$  بصورت زیر است:

$$\delta F_p = F_p + F_u \delta u_p + F_{u'} \delta u'_p + F_{u''} \delta u''_p \quad (13)$$

با مشتق‌گیری پاره‌ای از رابطه (۵)، تغییرات  $F$  بر حسب پارامترها و مشتقات میدان بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\delta F_p = F_p + (bu'' - c) \delta u_p + (2bu') \delta u'_p + (a + bu) \delta u''_p \quad (14)$$

با جایگذاری روابط (۱۲) و (۱۴) در رابطه (۱۱) و مرتب‌سازی داریم:

$$\delta Q_p = \eta_p - \left(\frac{a+b}{\tilde{c}}\right) \delta u'_p(0) + \int_0^1 \lambda F_p d\xi + \int_0^1 \lambda [(bu'' - c) \delta u_p + (2bu') \delta u'_p + (a + bu) \delta u''_p] d\xi \quad (15)$$

در ادامه، به کمک انتگرالگیری جزء به جزء، مشتقات  $u$  را به  $\lambda$  منتقل کرده و به تبع آن، جملات جدید مرزی ایجاد می‌شوند:

$$\delta Q_p = \eta_p + \int_0^1 \lambda F_p d\xi + \int_0^1 [(a+bu)\lambda'' - c\lambda] \delta u_p d\xi + BC \quad (16)$$

جملات مرزی یکپارچه‌شده در جمله BC رابطه (16)، بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$BC = -\left(\frac{a+b}{\tilde{c}}\right) \delta u_p'(0) + [\lambda(2bu') \delta u_p]_0^1 + [\lambda(a+bu) \delta u_p']_0^1 - [(\lambda(a+bu))' \delta u_p]_0^1 \quad (17)$$

متغیر الحاقی  $\lambda$  را بگونه‌ای تعیین می‌کنیم تا انتگرال دوم در رابطه (15) صفر گردد. براین اساس، معادله الحاقی بدست می‌آید:

$$(a+bu)\lambda'' - c\lambda = 0 \quad (18)$$

برای حذف جملات مرزی BC در رابطه (16)، می‌توان شرایط مرزی مناسبی را برای متغیر الحاقی انتخاب نمود. با توجه به اینکه دمای پایه فین ثابت است،  $\delta u_p(0) = 0$  و  $u_p(0) = 1$ ، شرط مرزی متغیر الحاقی در پایه فین بصورت انتخاب می‌شود:

$$-\left(\frac{a+b}{c+d}\right) \delta u_p'(0) - (a+b)\lambda(0) \delta u_p'(0) = 0 \rightarrow \lambda(0) = -\frac{1}{c+d} \quad (19)$$

برای یافتن شرط مرزی الحاقی در نوک فین، ابتدا جملات در مرز  $\xi = 1$  رابطه (17) را نوشته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\lambda(1)[bu_p'(1) \delta u_p(1) + a \delta u_p'(1) + bu(1) \delta u_p'(1)] - (a+bu(1)) \lambda_p'(1) \delta u_p = 0 \quad (20)$$

برای ساده‌سازی در رابطه (20) نیاز است که تغییرات در شرط مرزی جابجایی را به کمک رابطه (8) بصورت زیر بدست آوریم:

$$\delta([a+bu(1)]u'(1) + d u(1)) = 0 \rightarrow a \delta u_p'(1) + b(u(1) \delta u_p'(1) + u'(1) \delta u_p(1)) = -d \delta u_p(1) \quad (21)$$

با جایگذاری رابطه (21) در جمله اول در رابطه (20)، شرط مرزی مناسب متغیر الحاقی در نوک فین بدست می‌آید:

$$(a+bu(1)) \lambda_p'(1) + d \lambda_p(1) = 0 \quad (22)$$

شایان ذکر است که برای اعمال شرط مرزی فوق، نیاز است که ابتدا مسئله اصلی حل شده و مقدار دما در نوک فین محاسبه گردد. در نهایت، مقدار تغییرات کل بازده به ازای هر پارامتر ترکیبی بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\delta Q_p = \eta_p + \int_0^1 \lambda F_p d\xi \quad (23)$$

رابطه (23) تغییرات کل بازده فین را بر اساس تغییرات در پارامترهای ترکیبی  $p = \{a, b, c, d\}$ ، بدست می‌دهد. برای یافتن تغییرات فین نسبت به پارامترهای مؤثر  $\{K_0, \beta_0, H_0, \Delta T_0, A_0, P_0, L_0\}$ ،  $\delta Q_q$ ، می‌بایست مشتقات جزئی هر پارامتر ترکیبی را نسبت به یک پارامتر مؤثر محاسبه نمود. جدول 2، مشتقات مربوطه را گزارش می‌دهد.

معادلات پایستگی انرژی (5) و الحاقی (18) به همراه شرایط مرزی معادله انرژی (8) و معادله الحاقی (19) و (22)، به کمک روش تفاضل-محدود مرتبه دوم گسسته‌سازی می‌شوند [16]. شرایط مرزی نیز بصورت پیشرو در پایه فین و پسرو در نوک فین گسسته‌سازی می‌شوند. برای محاسبه انتگرال در رابطه (23)، از روش عددی دوزنقه‌ای استفاده می‌شود. سایر مشتقات پاره‌ای نسبت به پارامتر، بصورت تحلیلی قابل محاسبه هستند. همچنین، معادلات گسسته‌سازی شده انرژی و الحاقی به روش تکراری گوس-سایدل نقطه‌ای با لحاظ ضرب فوق‌رهابی برای افزایش نرخ همگرایی حل می‌شوند. از یک شبکه محاسباتی یکنواخت استفاده شده و تعداد نقاط مورد نیاز برای دقت و حجم محاسباتی بهینه برابر با 100 سلول محاسباتی انتخاب شده است. از زبان برنامه‌نویسی پایتون برای حل عددی معادلات استفاده شده و معیار همگرایی بر اساس خطای باقیمانده  $10^{-12}$  نسبت به خطای تکرار اول لحاظ شده است.

جدول 2: گرادیان بازده فین نسبت به پارامترهای مؤثر و عدد بایو در راستای فین

**Table 2. Gradient of fin efficiency with respect to effective parameters and longitudinal Biot number**

گرادیان نسبت به عدد بایو	گرادیان نسبت به پارامتر مؤثر
$Bi_L = Bi_L(\beta_0, K_0, H_0, \Delta T_0, L_0)$	$Q_{K_0} = A_0(Q_a + Q_b \beta_0 \Delta T_0)$
$Q_{Bi_L} = K_0(1 + \beta_0 \Delta T_0) \left[ \frac{Q_{H_0}}{L_0} + \frac{Q_{L_0}}{H_0} \right]$	$Q_{\beta_0} = Q_b K_0 A_0 \Delta T_0$
$-\frac{H_0 L_0}{Bi_L^2} \left[ \frac{Q_{K_0}}{1 + \beta_0 \Delta T_0} + \frac{Q_{\beta_0}}{K_0 \Delta T_0} + \frac{Q_{\Delta T_0}}{\beta_0 K_0} \right]$	

$$\begin{aligned}
 Q_{H_0} &= Q_c P_0 L_0^2 + Q_d A_0 L_0 \\
 Q_{\Delta T_0} &= Q_b K_0 A_0 \beta_0 \\
 Q_{A_0} &= K_0 (Q_a + Q_b \beta_0 \Delta T_0) + Q_d h_0 L_0 \\
 Q_{P_0} &= Q_c H_0 L_0^2 \\
 Q_{L_0} &= H_0 (2Q_c P_0 L_0 + Q_d A_0)
 \end{aligned}$$

ضریب تأثیر فین  $\varepsilon$  نیز می‌تواند به عنوان یک تابع هدف مناسب انتخاب گردد. در یک فین مقطع=ثابت می‌توان مقدار تغییرات ضریب تأثیر را با دانستن تغییرات بازده، مساحت سطح کل فین، و مساحت سطح مقطع فین بدست آورد.

$$\varepsilon = \frac{q_f}{q_{base}} = \frac{q_{max}}{q_{base}} \eta = \frac{A_f}{A_0} \eta = (1 + \alpha_0) \eta, \quad \alpha_0 = \frac{P_0 L_0}{A_0} \quad (24)$$

به کمک مشتق‌های زنجیره‌ای، تغییرات ضریب تأثیر بر حسب پارامتر مؤثر و بازده بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\delta \varepsilon_q = (1 + \alpha_0) \delta \eta_q + \eta \delta \alpha_{0,q} \quad (25)$$

### ۳- بررسی نتایج

در این بخش از مقاله، اثر پارامترها بر توزیع دما و تغییرات بازده به کمک روش الحاقی برای یک فین با ضریب هدایت وابسته به دما تشریح می‌گردد. جهت سهولت در تحلیل نتایج، مقادیر انتخاب‌شده مشترک در پارامترهای میدان، در جدول ۳ خلاصه می‌گردد.

جدول ۳: مقادیر انتخاب‌شده مشترک برای پارامترهای مؤثر در تحلیل میدان دما و بازده فین

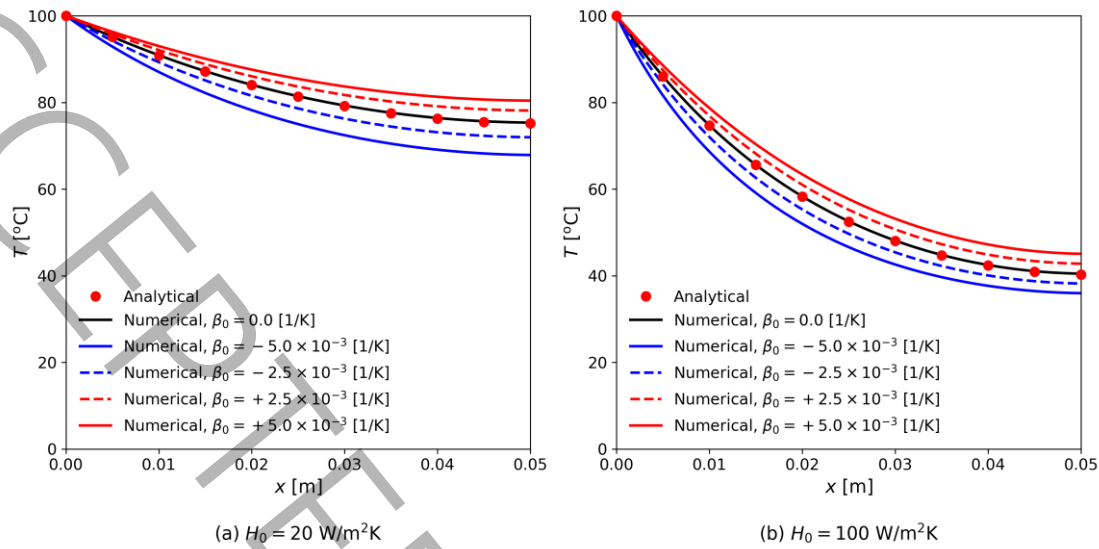
**Table 3. Gradient of fin efficiency with respect to effective parameters and longitudinal Biot number**

مقادیر پارامترها	شماره شکل و جدول
$A_0 = 19.63 \text{ mm}^2$ (معادل قطر 5 mm) $P_0 = 1.571 \text{ cm}$ (معادل قطر 5 mm) $\Delta T_0 = 80^\circ \text{C}$ و $T_0 = 20^\circ \text{C}$ $K_0 = 50 \text{ W/mK}$ $L_0 = 5 \text{ cm}$ $H_0 = 100 \text{ W/m}^2 \text{K}$	تمامی اشکال و جداول شکل ۲ و جدول ۳ جدول ۳ و ۴، تمامی اشکال به جز شکل ۴ شکل‌های ۷ تا ۱۰

### ۳-۱- توزیع دمای فین و نرخ انتقال حرارت

در شکل ۲ اثر وابستگی ضریب هدایت به دما با اعمال شیب مرجع  $\beta_0 = \pm 0.0051/\text{K}$  بررسی می‌شود. با مقایسه با حل تحلیلی هدایت-ثابت، شیب مثبت  $\beta_0$  باعث افزایش مقطعی دما درون فین شده و توزیع آن را به حالت یکنواخت‌تر سوق می‌دهد. برعکس، شیب منفی  $\beta_0$  باعث افت مقطعی بیشتر در دما و ایجاد گرادیان شدیدتر در توزیع دما درون فین شده است. بدین ترتیب، گرادیان دما در پایه فین در حالت شیب منفی  $\beta_0$  بیشتر از حالت شیب مثبت است. جدول ۳ میزان تغییرات دمای نوک فین در اثر تغییر در شیب  $\beta_0$  را گزارش می‌دهد. این جدول نشان می‌دهد که در ضریب  $H_0$  کمتر، مقدار  $\beta_0$  اثر بیشتری در توزیع دمای درون فین دارد. شکل ۳ اثر  $\beta_0$  بر نرخ انتقال حرارت از فین را برحسب وات نشان می‌دهد. هر چه مقدار  $\beta_0$  منفی‌تر شود، قابلیت انتقال حرارت در فین کاهش می‌یابد. برعکس، با افزایش  $\beta_0$  در محدود مقادیر مثبت، نرخ انتقال حرارت افزایش می‌یابد. همچنین، شکل ۳ نشان می‌دهد که اثر شیب دما بر تغییرات نرخ انتقال حرارت در ضریب جابجایی بیشتر سیال، افزایش یافته است. جدول ۴ اثر ضریب

جابجایی و هدایت مرجع برای نرخ انتقال حرارت در مقادیر پایه در  $\beta_0 = 0$ ، کمینه در  $\beta_0 = -0.001$ ، و بیشینه در  $\beta_0 = +0.001$  را نشان می‌دهد. طبق این جدول، تغییرات نرخ انتقال حرارت، در مقادیر بالاتر ضرایب جابجایی و هدایت، بیشتر است.



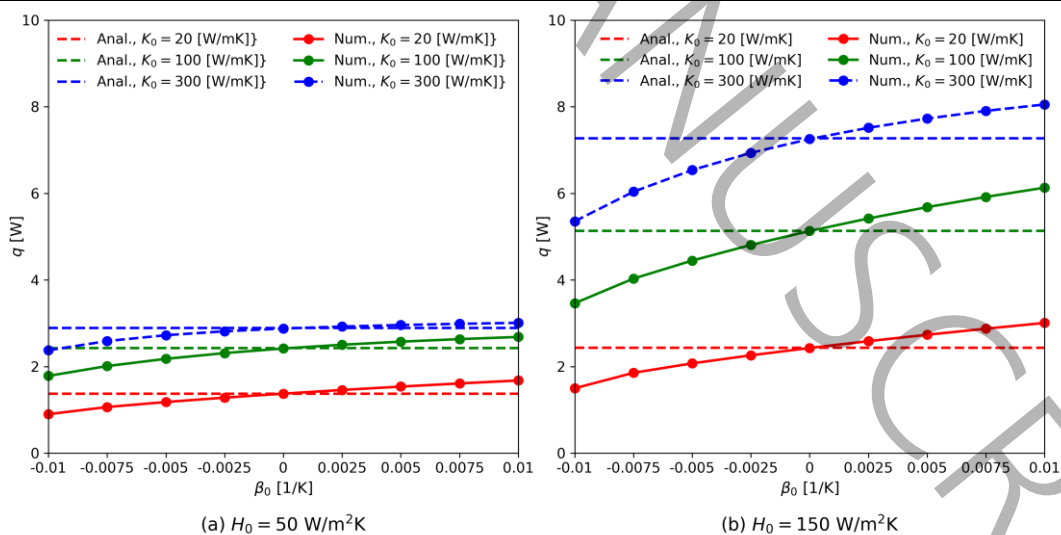
شکل ۲: اثر تغییرات شیب ضریب هدایت بر توزیع دما درون فین

Fig. 2. Effect of variations in thermal conductivity on the temperature distribution within the fin

جدول ۴: تغییرات دمای نوک فین بر حسب درجه سانتیگراد بر اثر تغییر شیب ضریب هدایت فین

Table 4. Variation of the fin-tip temperature (°C) with changes in the slope of thermal conductivity

شیب ضریب هدایت فین $\beta_0$ [1/K]					ضریب جابجایی $H_0$
+0/005	+0/0025	-0/005	-0/0025	0/0	
5/06	2/78	-7/48	-3/38	75/34	20 W/m <sup>2</sup> K
4/58	2/29	-4/51	-2/28	40/48	100 W/m <sup>2</sup> K



شکل ۳: اثر تغییرات شیب ضریب هدایت بر نرخ انتقال حرارت از فین

Fig. 3. Effect of variations in the thermal conductivity slope on the fin heat transfer rate

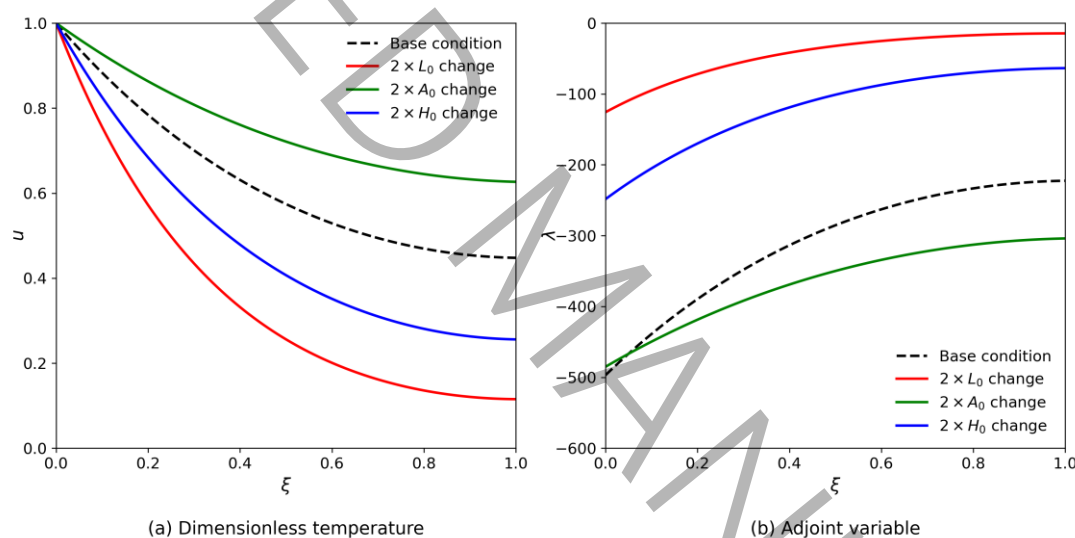
جدول ۵: تغییرات نرخ انتقال حرارت از فین نسبت به تغییرات شیب ضریب هدایت

Table 5. Variation of the fin heat transfer rate with changes in the thermal conductivity slope

$q_{f,max}$ at $\beta_0 = +0.01$	$q_{f,min}$ at $\beta_0 = -0.01$	$q_f$ at $\beta_0 = 0$	$K_0$ [W/mK]	$H_0$ [W/m <sup>2</sup> K]
1/680	0/901	1/377	20	50
2/685	1/785	2/425	100	
3/010	2/377	2/890	300	
3/009	1/500	2/432	20	150
6/132	3/464	5/138	100	
8/054	5/356	7/275	300	

### ۳-۲- توزیع متغیر الحاقی در فین

شکل ۴ توزیع دمای بی‌بعد و متغیر الحاقی مربوطه را برای شرایط مختلف در طول فین، سطح مقطع فین، و ضریب جابجایی سیال نشان می‌دهد. شرایط هندسی مطابق با جدول ۳ بوده و هر منحنی از نمودار، شامل تغییر دو برابری در یکی از پارامترهای مسئله است. مشاهده می‌شود که متناسب با تغییر پارامترهای مسئله، توزیع دما و متغیر الحاقی تغییر کرده‌اند هرچند که متغیر الحاقی، دارای تغییرات شدیدتر بویژه در شرط مرزی پایه است. این موضوع ناشی از تعریف بازده فین در رابطه (۹) و اعمال مستقیم آن در شرط مرزی پایه فین برای متغیر الحاقی، طبق رابطه (۱۹)، است.



شکل ۴: توزیع دمای بی‌بعد و متغیر الحاقی مربوط درون فین

Fig. 4. Distributions of dimensionless temperature and adjoint variable within the fin

### ۳-۳- آنالیز تغییرات تابع هدف

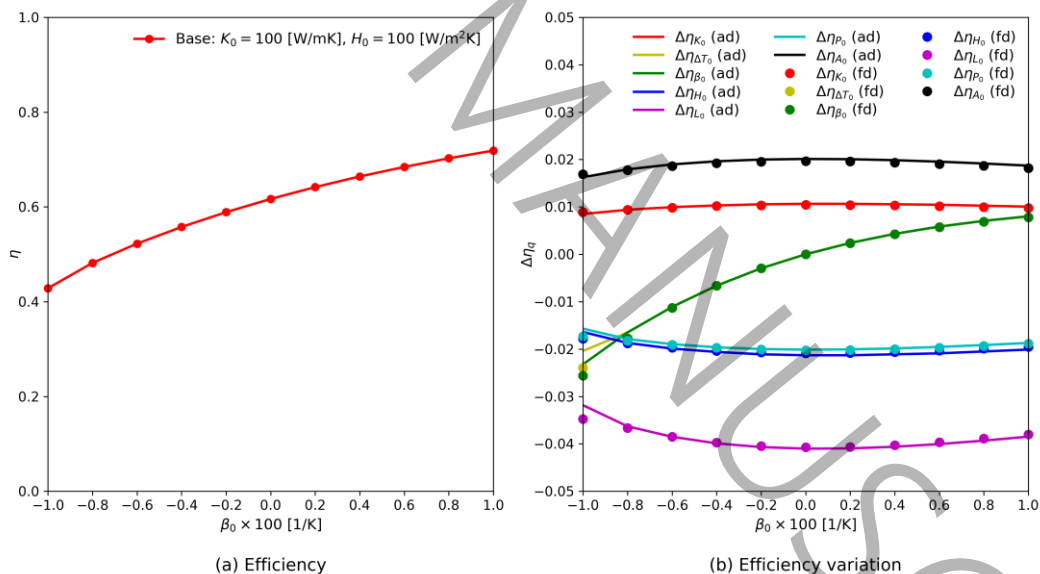
به کمک رابطه (۲۳) و جدول ۲، گرادیان تابع هدف نسبت به پارامترهای مؤثر،  $\delta Q_q = \partial Q / \partial q$ ، محاسبه می‌شود. تغییرات مربوطه را می‌توان با انتخاب یک مقدار میانگین  $q_m$  و یک انحراف معیار مناسب برای هر پارامتر  $\sigma_q$  محاسبه نمود. تغییرات برای هر پارامتر بصورت  $\Delta Q = \delta Q_q \sigma_q$  بدست می‌آید. در این پژوهش، مقادیر پارامترهای مرجع را به عنوان مقادیر میانگین در نظر گرفته و برای هر پارامتر، انحراف معیار 0/1 لحاظ می‌گردد. تغییرات کل تابع هدف  $Q = \{\eta, \varepsilon\}$  بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta Q = \sqrt{\sum_{q=1}^{N_q} (\delta Q_q^2 \sigma_q^2)} \quad (26)$$

شکل ۵ تغییرات بازده فین را در مقادیر شیب ضریب هدایت مختلف  $\beta_0$  نمایش می‌دهد. تطابق خوبی بین محاسبه تغییرات با روش الحاقی (ad) و روش تفاضل محدود (fd) وجود دارد. محاسبه گرادیان در روش تفاضل محدود بصورت زیر است [۱۷]:

$$\delta Q_{q,fd} \approx \frac{Q(q+\hat{\varepsilon})-Q(q)}{\hat{\varepsilon}} \quad (27)$$

رابطه (27) تقریب مرتبه اول پیشرو از گرادیان با ایجاد اختلال جزئی  $\hat{\varepsilon}$  است. در این پژوهش،  $\hat{\varepsilon} = 10^{-6}$  در نظر گرفته می‌شود. مطابق شکل (a)، بازده فین با افزایش شیب  $\beta_0$ ، همواره افزایش می‌یابد. مطابق شکل (b)، افزایش در ضریب هدایت مرجع  $K_0$ ، سطح مقطع فین  $A_0$ ، و شیب ضریب هدایت  $\beta_0$ ، همواره باعث افزایش بازده فین شده است. افزایش در مقادیر ضریب جابجایی  $H_0$ ، محیط پیرامون  $P_0$  و طول فین  $L_0$  همواره باعث کاهش در بازدهی فین می‌شود. اگر در هر مقدار میانگین از  $\beta_0$ ، تغییراتی در مقدار آن ایجاد کنیم، مانند  $\delta\beta_0$ ، آنگاه نحوه تغییرات بازده بسیار شبیه به زمانی است که در همین مقدار میانگین  $\beta_0$ ، تغییری در اختلاف دمای پایه و سیال  $\Delta T_0$  ایجاد شود.  $\Delta T_0$  بیشتر باعث تضعیف بازده فین می‌شود اگر شیب  $\beta_0$  منفی باشد. این موضوع برای شیب  $\beta_0$  مثبت، باعث تقویت بازده می‌شود. افزایش  $\Delta T_0$  زمانی مفید است که ضریب هدایت با افزایش دما، افزایش یابد. از لحاظ فیزیکی، افزایش مقدار  $\beta_0$  باعث تقویت ضریب هدایت ماده شده که به دنبال آن بازده فین افزایش می‌یابد. حال آنکه در یک هندسه ثابت از فین، اگر مقدار ضریب انتقال حرارت سیال اطراف  $H_0$  افزایش یابد، توزیع دما درون فین دچار گرادیان شدیدتری شده و از حالت یکنواختی دور می‌شود. عدم یکنواختی در توزیع دما درون فین باعث کاهش بازدهی آن خواهد شد. این موضوع نمایانگر کاربرد اصلی فین‌ها بوده که بر اساس تجربه مهندسی، فین‌ها می‌بایست در محیط‌هایی استفاده شوند که در آنها ضریب انتقال حرارت سیال پایین است [14]. همچنین، افزودن طول فین  $L_0$  در حالی که سایر پارامترهای مسئله ثابت نگه داشته شوند، باعث کاهش بازدهی فین می‌شود. این موضوع به ضعف بودن نرخ انتقال حرارت در فواصل دورتر از پایه فین مربوط می‌گردد. در این حالت، افزودن بیشتر طول فین کمک شایانی به بهبود نرخ انتقال حرارت از فین نکرده، حال آنکه مقاومت حرارتی فین به صورت چشمگیری افزایش می‌یابد.

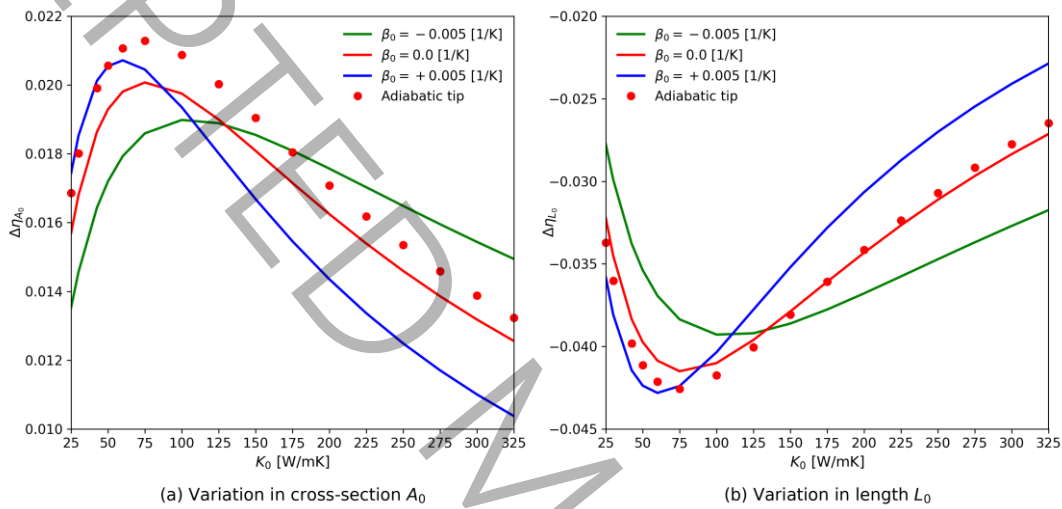


شکل ۵: تغییرات بازده فین با هدایت وابسته به دما بر حسب ۱۰٪ تغییر در پارامترهای مؤثر

**Fig. 5. Variations in efficiency for a fin with temperature-dependent conductivity with respect to a 10% variation in the effective parameters**

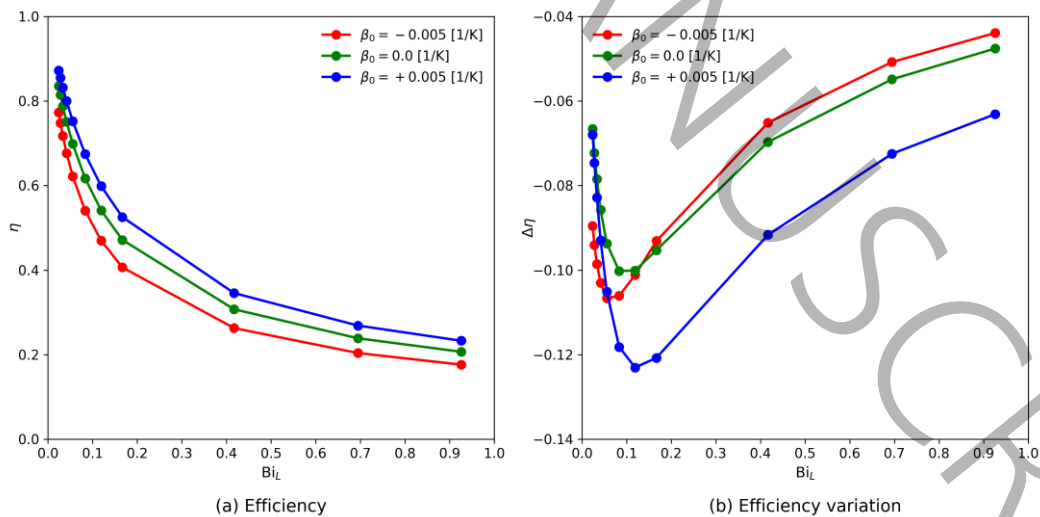
شکل ۶ اثر تغییرات سطح مقطع و طول فین را بصورت جداگانه بر بازده فین برای محدوده‌ای از ضریب هدایت مرجع  $K_0$  بررسی می‌کند. مطابق شکل (a)، افزایش سطح مقطع فین در هر مقدار  $K_0$  و  $\beta_0$ ، باعث بهبود بازده می‌شود. مطابق شکل (b)، افزایش طول فین، همواره بازده را کاهش می‌دهد. در این راستا، رفتار مشابهی بین تغییرات بازده فین با ضریب هدایت وابسته به دما و فین نوک-عیاق و هدایت-ثابت، دیده می‌شود. در هدایت مرجع بین 25 W/mK تا 125 W/mK، یک نقطه بیشینه در تغییرات بازده وجود دارد. محل نقطه بیشینه با افزایش  $\beta_0$  به سمت  $K_0$  کمتر سوق داده می‌شود. همچنین، مقدار بیشینه تغییرات در حالت

$\beta_0 > 0$  مثبت، بالاتر از حالت  $\beta_0 < 0$  است. شکل ۷ تغییرات بازده نسبت به تغییر عدد بایو را نشان می‌دهد. مطابق شکل ۷(a)، بازده با افزایش عدد بایو کاهش می‌یابد. دلیل این امر، افزایش مقاومت هدایتی در برابر مقاومت جابجایی است. افزایش طول، کاهش ضریب هدایت مرجع، و افزایش ضریب جابجایی، همگی منجر به افزایش عدد بایو گردیده و در نتیجه یک اثر ترکیبی، مقدار بازده کاهش می‌یابد. مقادیر منفی (کاهش) تغییرات بازده در شکل ۷(b) نیز این موضوع را تأیید می‌کند. شکل ۷(b) نشان می‌دهد که حساسیت فین به تغییرات عدد بایو در نزدیکی ۰/۱ بیشینه است. همچنین، حساسیت بازده به تغییرات عدد بایو هنگام عبور از فرض یکپارچگی دما، به حداکثر خود می‌رسد. افزایش 10% در عدد بایو (۰/۱ تا ۰/۱۱)، می‌تواند بازده فین را تا 12% کاهش دهد. همچنین، مطابق شکل ۸، میانگین تغییرات بازده  $\Delta\eta$  تنها ناشی از تغییر ۱۰ درصدی در مقدار شیب ضریب هدایت و طول فین به صورت جداگانه نشان داده شده است. مطابق این شکل، در محدود ارائه‌شده برای  $L_0$  و  $\beta_0$ ، تغییرات بازده فین بین ۱/۰ تا ۲/۵ درصد است.



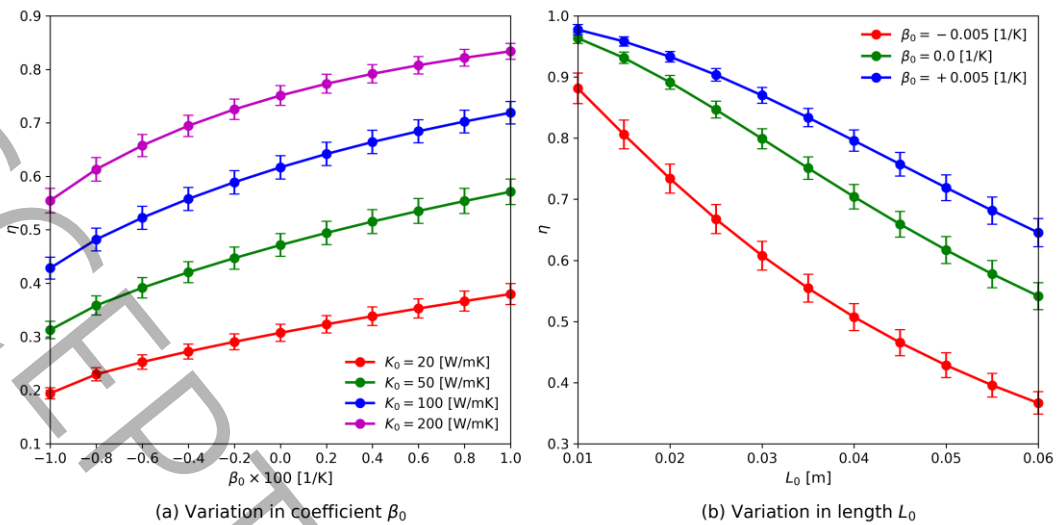
شکل ۶: تغییرات بازده فین با هدایت وابسته به دما بر حسب ۱۰٪ تغییر در ضریب هدایت مرجع

**Fig. 6. Variations in efficiency for a fin with temperature-dependent conductivity with respect to a 10% variation in the reference thermal conductivity**



شکل ۷: تغییرات بازده فین با هدایت وابسته به دما بر حسب ۱۰٪ تغییر در عدد بایو

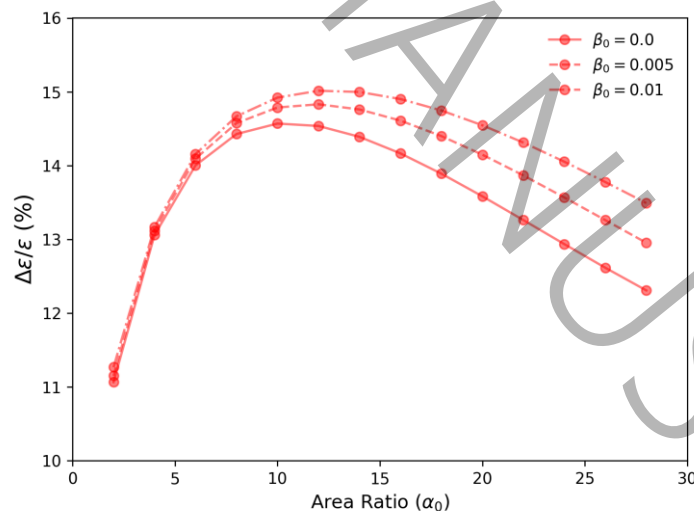
**Fig. 7. Variations in efficiency for a fin with temperature-dependent conductivity with respect to a 10% variation in the longitudinal Biot number**



شکل ۸: تغییرات میانگین بازده فین با هدایت وابسته به دما ناشی از ۱۰٪ تغییر در (a) شیب ضریب هدایت، و (b) طول فین

**Fig. 8. Variations in efficiency for a fin with temperature-dependent conductivity with respect to a 10% variation in (a) conductivity slope and (b) fin length**

شکل ۹ تغییرات کل ضریب تأثیر فین را برحسب نسبت مساحت جانبی به سطح مقطع فین نشان می‌دهد. تغییرات مذکور با استفاده از رابطه (۲۶) بدست آمده و با مقدار ضریب تأثیر نرمال شده است. نتایج شکل ۹ مشخص می‌نماید که حساسیت ضریب تأثیر در محدوده نسبت مساحت ۱۰ الی ۱۲ بیشینه می‌گردد. همچنین، افزایش وابستگی ضریب هدایت فین به دما باعث افزایش حساسیت ضریب تأثیر شده و مقدار بیشینه آن کمی به سمت نسبت مساحت‌های بیشتر سوق پیدا می‌کند.

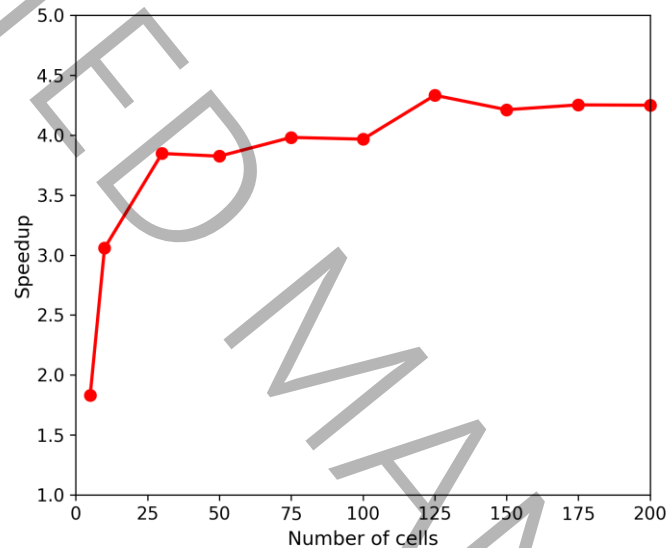


شکل ۹: تغییرات کل ضریب تأثیر فین با هدایت وابسته به دما بر حسب نسبت مساحت جانبی به سطح مقطع

**Fig. 9. Total variation in effectiveness for a fin with temperature-dependent conductivity with respect to the circumferential-to-cross-sectional area ratio**

### ۳-۴- افزایش سرعت محاسبات

برتری اصلی روش الحاقی نسبت به روش‌های تفاضل محدود در محاسبه بهینه‌گرادیان‌ها و تغییرات تابع هدف است. در این روش، برای یک تابع هدف مشخص، تنها نیاز به یک بار حل معادلات حاکم و یک بار حل معادله الحاقی است. در ادامه، می‌توان گرادیان تابع هدف نسبت به تمامی پارامترهای مؤثر را بصورت هم‌زمان یافت. این در حالی است که در یک روش تفاضل محدود، به ازای هر پارامتر مؤثر، می‌بایست حداقل یک بار معادلات حاکم حل شوند. همچنین، اگر بتوان معادلات حاکم و الحاقی را بصورت تحلیلی حل نمود، محاسبه گرادیان در روش الحاقی، دیگر متأثر از محدودیت‌های عددی مانند خطاهای گسسته‌سازی و گرد کردن، و ناپایداری عددی نیست. براساس این دو ویژگی، روش الحاقی یکی از روش‌های کارآمد در آنالیز حساسیت و بهینه‌سازی سامانه‌های مکانیکی و حرارتی، محسوب می‌شود. در این مقاله، افزایش سرعت محاسبه تغییرات بازده نسبت به روش تفاضل محدود پیشرو، بررسی می‌شود. شکل ۱۰، مقدار افزایش سرعت<sup>۱۶</sup>، بصورت نسبت زمان محاسبه تغییرات بازده نسبت به تمامی پارامترهای مؤثر در روش الحاقی و تفاضل محدود، نشان داده شده است. محاسبات بر روی یک هسته پردازشگر Intel(R) Core-i7-6700 HQ با فرکانس 2/60 GHz انجام شده است. با توجه به شکل ۱۰، افزایش سرعت بین ۱/۸۳ برابر در تعداد سلول کم تا ۴/۳۳ برابر در تعداد سلول زیاد حاصل شده است.



شکل ۱۰: افزایش سرعت محاسبه تغییرات در بازده فین در روش الحاقی نسبت به روش تفاضل-محدود پیشرو

**Fig. 10. Computational speedup in calculating variations in fin efficiency using the adjoint method compared with the forward finite-difference scheme**

### ۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، روش الحاقی برای آنالیز حساسیت بازده فین با ضریب هدایت وابسته به دما معرفی گردید. پارامترهای مؤثر هندسی و حرارتی برای این تحلیل لحاظ شدند. برای محاسبه تغییرات بازده، مقدار انحراف معیار ۱۰٪ برای هر یک از پارامترها در نظر گرفته شد. نشان داده شد که شیب ضریب هدایت در یک فین با ضریب هدایت متغیر، اثر شاخصی در توزیع دما و بازده دارد. نشان داده شد که افزایش جزئی در برخی از پارامترها مانند طول فین و ضریب جابجایی سیال، باعث کاهش بازده شده و افزایش جزئی در پارامترهای دیگر مانند سطح مقطع و ضریب هدایت مرجع، باعث بهبود بازده می‌شود. در این خصوص، شیب ضریب هدایت و اختلاف دمای بین پایه فین و سیال، اثر دوگانه‌ای را نشان می‌دهند. به‌علاوه، عدد بایو در مجمع، اثر ترکیبی بیشتری بر بازده فین داشته و این اثر در نزدیکی بایو برابر ۰/۱ که فرض یکپارچگی دما در حال نقض شدن است، به بیشترین مقدار خود می‌رسد. از لحاظ محاسباتی نیز، در این مسئله پایه‌ای انتقال حرارت، افزایش سرعت تا ۴ برابر در محاسبه گرادیان تابع هدف، نسبت به روش تفاضل محدود حاصل شد.

<sup>16</sup> Speedup

#### علائم انگلیسی

$A_0$	مساحت سطح مقطع فین، $m^2$
$Bi_L$	عدد بایو در راستای فین
$H_0$	ضریب جابجایی سیال، $W/m^2K$
$K_0$	ضریب هدایت مرجع، $W/mK$
$L_0$	طول فین، $m$
$P_0$	محیط اطراف فین، $m$
$Q$	تابع هدف تعمیم یافته
$T_0$	دمای سیال، $^{\circ}C$
$T$	دمای فین، $^{\circ}C$
$u$	دمای بی بعد فین

#### علائم یونانی

$\alpha_0$	نسبت مساحت جانبی به سطح مقطع فین
$\beta_0$	شیب تغییرات دما در ضریب هدایت، $1/K$
$\varepsilon$	ضریب تأثیر فین
$\delta$	عملگر تغییرات
$\eta$	بازده فین
$\lambda$	متغیر الحاقی
$\xi$	مختصات بی بعد در راستای فین

#### زیرنویس

$p$	پارامترهای ترکیبی
$q$	پارامترهای مؤثر

#### ۵- منابع

- [1] R.G. McClarren, P. McClarren, R. Penrose, Uncertainty quantification and predictive computational science, 2018.
- [2] N.P. Nguyen, E. Maghsoudi, S.N. Roberts, B. Kwon, Designing pin fin heat sinks with restarting adjoint optimization approach, International Journal of Heat and Mass Transfer, 242 (2025) 126856.
- [3] P. Jaksch, Implementation of an adjoint thermal solver for inverse problems, in: 12th European Conference on Turbomachinery Fluid dynamics & Thermodynamics, EUROPEAN TURBOMACHINERY SOCIETY, 2017.
- [4] Y. Jarny, M. Ozisik, J. Bardou, A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction, International journal of heat and mass transfer, 34(11) (1991) 2911–2919.
- [5] W. Khan, A. Aziz, Transient heat transfer in a functionally graded convecting longitudinal fin, Heat and Mass Transfer, 48(10) (2012) 1745–1753.
- [6] E. Dowty, D. Haworth, Generalized solutions for transient heat conduction with variable conductivity, Nuclear Engineering and Design, 6(1) (1967) 57–64.
- [7] J. Yu, C. An, Y. He, J. Su, Transient nonlinear heat conduction in a slab with temperature-dependent thermal conductivity: Integral transform and lumped model solutions, International Communications in Heat and Mass Transfer, 158 (2024) 107886.
- [8] M. Dehghan, M.S. Valipour, S. Saedodin, Temperature-dependent conductivity in forced convection of heat exchangers filled with porous media: a perturbation solution, Energy Conversion and Management, 91 (2015) 259–266.

- [9] A. Gholami, F. Pourfayaz, Comprehensive Sensitivity Analysis of Carbon Nanoparticles-Enhanced PCMs' Thermal Conductivity, *Mechanical Engineering*, 25(03) (2025) 137–146.
- [10] P.P. Raikar, N. Anand, M. Pini, C. De Servi, 3D optimization of heat sink fins using adjoint-based optimization with a CAD-based parametrization, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 255 (2026) 127722.
- [11] M. Fuchs, C.N. Dagli, S. Kabelac, Shape Optimization of Heat Exchanger Fin Structures Using the Adjoint Method and Their Experimental Validation, *Energies*, 17(5) (2024) 1246.
- [12] A. Moradi, H. Ahmadikia, Analytical solution for different profiles of fin with temperature-dependent thermal conductivity, *Mathematical Problems in Engineering*, 2010(1) (2010) 568263.
- [13] S.E. Ghasemi, M. Hatami, D. Ganji, Thermal analysis of convective fin with temperature-dependent thermal conductivity and heat generation, *Case Studies in Thermal Engineering*, 4 (2014) 1–8.
- [14] T.L. Bergman, A.S. Lavine, *Fundamentals of heat and mass transfer*, 8 ed., John Wiley & Sons, 2017.
- [15] S. Li, L. Petzold, Adjoint sensitivity analysis for time-dependent partial differential equations with adaptive mesh refinement, *Journal of Computational Physics*, 198(1) (2004) 310–325.
- [16] D. Anderson, J.C. Tannehill, R.H. Pletcher, R. Munipalli, V. Shankar, *Computational fluid mechanics and heat transfer*, CRC press, 2020.
- [17] R.T. Haftka, D.S. Malkus, Calculation of sensitivity derivatives in thermal problems by finite differences, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(12) (1981) 1811–1821.

# Adjoint-Based Sensitivity Analysis of a Fixed Cross-Section Fin with Temperature-Dependent Conductivity

Behzad Baghapour<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Assistant Professor, Mechanical Engineering Department, Amirkabir University of Technology, Iran

## ABSTRACT

In this paper, the sensitivity of the efficiency of a fixed cross-sectional fin with temperature-dependent thermal conductivity to various parameters is investigated using the adjoint equation. A one-dimensional steady-state formulation is assumed for both the governing energy equation and the corresponding adjoint equation. The appropriate boundary condition for a convective fin tip is derived for the adjoint variable. The energy and adjoint equations are solved numerically using a finite-difference scheme. The results indicate that a slight increase in certain parameters, such as the cross-sectional area and the base thermal conductivity, leads to an improvement in fin efficiency. In contrast, increasing parameters such as the fluid heat transfer coefficient and the fin length results in a reduction in efficiency. The slope factor in the linear thermal conductivity model exhibits a non-monotonic effect: for negative values, increasing the slope reduces fin efficiency, whereas for positive values, it enhances the efficiency. Furthermore, the Biot number defined along the fin length shows a pronounced negative influence on fin efficiency as it increases. Its most significant impact occurs around a Biot number of 0.1, corresponding to the transition from a nearly uniform temperature distribution to a regime with a pronounced internal temperature gradient.

## KEYWORDS

Sensitivity analysis, fin efficiency, temperature-dependent conductivity, adjoint equation, finite-difference method.