

حل مسئله بهینه‌سازی مانور ضربه‌ای سه بعدی مقید و

نامقید زمانی

محمد نوابی^{۱*}؛ محمد صنعتی^۲

چکیده

مانورهای مداری یا انتقال ماهواره‌ها بین مدارها، جایگاه ویژه‌ای در هر مأموریت فضایی دارد. منظور از انتقال ضربه‌ای بهینه، صرف حداقل میزان انرژی (ضربه) مورد نیاز برای انجام انتقال است. مسئله انتقال بهینه مداری ضربه‌ای سه بعدی از مسائل کاربردی است ولی به علت پیچیدگی خاص مسئله، حل آن در مقالات کمتر مورد بررسی قرار گرفته است. بهینه‌سازی و حل این مسئله بسیار مشکل بوده و نیازمند ابتکار برای حل هر حالت است. در این مقاله علاوه بر استخراج معادلات بهینه‌سازی برای بیان هندسه‌ی مدارهای اولیه، هدف و انتقالی نسبت به یکدیگر با استفاده از بحث مثلثات کروی، برای اولین بار حالت‌های مختلف قرارگیری مدار اولیه و هدف بیان می‌شود. با توجه به مسائل کاربردی، این مسئله در دو حالت مقید و نامقید زمانی بررسی و حل شود. از ویژگی‌های این مسئله بهینه‌سازی، دارا بودن حداقل‌های محلی متعددی است که برای دستیابی به پاسخ کلی مسئله، تغییرات تابع ضربه بر حسب متغیرهای مستقل ارائه می‌شود. برای یک مثال عددی، نتایج مانور ضربه‌ای بهینه در فضای سه بعدی ارائه شده است که نتایج در یک حالت خاص با حل مسئله لمبرت مقایسه شده که نشان‌دهنده دقت مناسب استخراج معادلات و محاسبات و کامل بودن آن‌ها در بدست آوردن همه عوامل مورد نیاز است.

کلمات کلیدی: مانورهای مداری ضربه‌ای، مثلثات کروی، مدار انتقالی، مسئله لمبرت

Optimal Impulsive Orbital 3D Maneuver with or without Time Constraint

M. Navabi and M. Sanatifar

ABSTRACT

Orbital transfers are an inevitable part of space missions. An optimal impulsive maneuver is one that consumes the minimum amount of energy to accomplish the transfer. The problem of optimal impulsive orbital 3D maneuver has been the subject of very few published researches due to its particular complications. Finding the optimized solution to this problem needs innovations in every aspect. However, this paper tries to turn this special kind of transfer into an applicable concept. In this paper, optimization equations to express the geometry of initial, target and transfer orbits with respect to each other are derived using the spherical trigonometry. Moreover, several cases for positioning the initial and target orbits relative to each other are presented. Based on actual applications, the problem is solved for both unconstrained and time-constrained cases. Comprising several local minimums is a characteristic of this optimization problem, consequently, variations of the delta-V are presented as a function of independent variables to achieve the general solution. The numerical results for the optimal impulsive orbital 3D maneuver are presented for a case study, and it is verified by comparing the results in a particular case with those from the Lambert problem. The illustrated results show the appropriate accuracy of the derived equations and performed computations.

KEYWORDS: Impulsive Orbital Maneuver, Spherical Triangle, Transfer Orbit, Lambert's Problem

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۱۰/۲۵

تاریخ اصلاحات مقاله: ۱۳۹۰/۷/۳

۱ * نویسنده مسئول و استادیار، دانشگاه شهید بهشتی - دانشکده مهندسی فن‌آوری‌های نوین، مهندسی هوافضا - مهندسی فضایی، sciences.edu@gmail.com

۲ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی فضایی، دانشگاه شهید بهشتی - دانشکده مهندسی فن‌آوری‌های نوین

مطالعه قرار می‌گیرد. این نوع انتقالات برای اولین بار در مرجع [۷] مطرح شده و معادلاتی برای آن بیان شد اما پس از آن به دلیل دشوار بودن هندسه مدارها و حالت‌های مختلف و همچنین غیرخطی بودن معادلات، در مرجع دیگری به آن نه از نظر درستی معادلات و نه حل عددی آن‌ها پرداخته نشد. برای حل مسائل مانور مداری با این هندسه‌های پیچیده، نیاز به بررسی حالت‌های ممکن قرارگیری مداری است و دشوارترین مرحله محاسبات، یافتن زوایای موجود خواهد بود [۷]. حالت‌های مختلف ناشی از قرارگیری مدارهای اولیه، انتقالی و هدف، تاکنون در هیچ مرجعی مورد بررسی قرار نگرفته است.

بطور خلاصه در این مقاله به ۱- استخراج و بررسی درستی معادلات بهینه‌سازی انتقال سه بعدی، ۲- بیان و بررسی حالت‌های مختلف قرارگیری مدارهای اولیه، انتقالی و هدف نسبت به یکدیگر، ۳- حل عددی معادلات و ۴- دستیابی و ارائه پاسخ کلی مسئله پرداخته می‌شود.

روابط بدست آمده برای یک مثال عددی در دو حالت انتقال مقید زمانی و نامقید زمانی اجرا می‌شود. از آنجا که پاسخ انتقال مقید زمانی را می‌توان با حل مسئله لمبرت مقایسه نمود، درستی پاسخ مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. البته حل مسئله لمبرت، با توجه به ماهیت تعریف آن فقط برخی از عوامل مورد نیاز را ارائه می‌دهد، اما در روش ارائه شده، همه عوامل لازم برای حل مسئله بهینه‌سازی مانور مداری، بدست خواهند آمد. همچنین، برای بررسی درستی روش حل ارائه شده، آخرین مثال حل شده مرتبط که در مرجع [۸] آمده است، دوباره حل شده است. در این مثال مدارها هم‌صفحه و غیر هم‌محور هستند که در نتیجه؛ اول نمی‌توان از روش هومن یا روش‌های مشابه آن استفاده نمود و همچنین برای حل یک مثال عددی که در آن مدارهای اولیه و هدف هم‌صفحه هستند، باید معادلات برای مسئله هم‌صفحه دوباره بازنویسی شوند که در این مقاله انجام شده است. در مرجع [۸] این مثال با یک روش پیچیده ریاضی حل شده که فقط دو پاسخ برای آن بدست آمده و حتی نویسنده مرجع نیز احتمال داده که یکی از پاسخ‌ها، پاسخ کلی مسئله است اما در این مقاله، با استفاده از الگوریتم ارائه شده پاسخ کلی مسئله بدست آمده است. نتایج نشان‌دهنده دقت مناسب این روش و کامل بودن آن در بدست آوردن عوامل لازم است.

۲- تعریف مسئله

برای بیان مسئله فرض می‌شود، انتقال از نقطه‌ای روی مدار اولیه، مانند نقطه (۱) به نقطه‌ای روی مدار هدف، مانند نقطه (۲)، باشد. این نقاط که نقطه تلاقی مدار اولیه و انتقالی و همچنین نقطه تلاقی مدار انتقالی و هدف هستند، نقاط تلاقی نامیده

به طور معمول ماهواره‌ها پس از پرتاب در مدار پارک قرار می‌گیرند بنابراین برای انتقال به مدار ماموریتی خود نیازمند مانورهای مداری هستند [۱]. همچنین به علت نیروهای اغتشاشی مختلفی که به ماهواره وارد می‌شوند، ماهواره از مدار ماموریتی خود خارج شده و در نتیجه مدار ماهواره‌ها باید بصورت دوره‌ای تصحیح شود [۲]. مدارهای عملیاتی ماهواره‌ها با توجه به ماموریت تعریف شده، می‌توانند از نظر شکل مدار، اندازه مدار و نوع مدار متفاوت باشند که این موضوع، پیچیدگی مسئله انتقالات بین مداری را افزایش می‌دهد. انتقال به مدار ماموریتی، به طور عموم توسط پيشران‌های^۱ نصب شده روی ماهواره انجام می‌شود و در نتیجه حداقل‌سازی مصرف سوخت مورد نیاز برای انتقال، همواره مورد توجه قرار می‌گیرد. با توجه به روش در دسترس و رایج که موتورهای راکتی هستند، بحث انتقالات بین مداری با یک فرض نزدیک به واقعیت بررسی می‌شود. این فرض، تغییر لحظه‌ای سرعت است که در بحث‌های فضایی بخصوص طراحی‌های اولیه، بیش‌تر مورد استفاده قرار می‌گیرد. در انتقالات ضربه‌ای، میزان سوخت مصرفی با Δv مورد نیاز برای انتقال رابطه دارد [۳].

انتقالات مداری ضربه‌ای می‌توانند براساس هندسه‌ی مدارهای اولیه و هدف، تعداد ضربات مورد استفاده، تغییر صفحه مداری یا ثابت بودن آن تقسیم‌بندی شوند [۴]. در مراجع مختلف، بیش‌تر به حالت‌های هندسی ساده برای مدارهای اولیه و هدف پرداخته شده است که به نظر می‌رسد به دلیل اجتناب از پیچیدگی‌های خاص ریاضی و هندسی این‌گونه مسائل است [۵]. در ساده‌ترین حالت، مسئله انتقال بین مدارهای دایروی هم‌صفحه مطرح می‌شود که اولین بار توسط هومن، مداری برای این انتقال طراحی شد [۶]. این مدار در نقاط نزدیکی^۲ و اوجش^۲ به مدارهای اولیه و هدف مماس بوده و ماهواره روی این مدار از نقطه حضیض تا اوج و یا برعکس (بسته به اینکه شعاع مدار اولیه بیش‌تر است یا شعاع مدار هدف) را می‌پیماید. این نوع مدار، به‌عنوان مدارانتقالی هومن شناخته شده است. این نوع انتقالات می‌توانند برای حالت‌های خاصی نیز بکار روند. به این نوع انتقالات، که ماهواره از نقطه حضیض یا اوج به نقطه مقابل سفر نماید، انتقالات «هومن‌گونه» گفته می‌شود. در حالت‌های پیچیده‌تر انتقال، مانند حالتی که مدارهای اولیه و هدف بیضی‌های غیر هم‌محور و غیر هم‌صفحه باشند و یا حالتی که زمان انتقال مقید باشد، روش‌های معمول قادر به حل مسئله انتقال بهینه نیستند. در این مقاله مسئله انتقال مداری ضربه‌ای بین مدارهای بیضوی غیر هم‌محور و غیر هم‌صفحه مورد

مدار بدون قید زمان؛ بدیهی است که باید گرادیان تابع ΔV نسبت به متغیرهای مستقل صفر شود:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial p} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_2} = 0 \quad (5)$$

که در پایان این روابط برای سه متغیر مستقل p و α_1 و α_2 حل خواهند شد.

۳-۲- مسئله انتقال بهینه همراه با قید زمان

منظور از مسئله انتقال بهینه همراه با قید زمان، انتقال مداری است که در زمان مشخصی بین دو مدار انجام شود و نسبت به انتقالات دیگر که بین همان دو مدار در زمان مشخص شده می‌تواند انجام شوند، انرژی کمتری مصرف نماید. برای این منظور باید روابط (۶) تا (۹) برقرار باشند.

$$\tau - \tau_0 = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial p} + k \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_1} + k \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_2} + k \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_2} = 0 \quad (9)$$

این معادلات برای سه متغیر مستقل p و α_1 و α_2 و همچنین ضریب لاگرانژ k حل خواهند شد. البته می‌توان در روابط (۷) تا (۹) ضریب k را حذف نمود. در نتیجه برای مسئله انتقال بهینه مقید زمانی، باید روابط (۷)، (۱۰) و (۱۱) برقرار باشند.

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0 \quad (10)$$

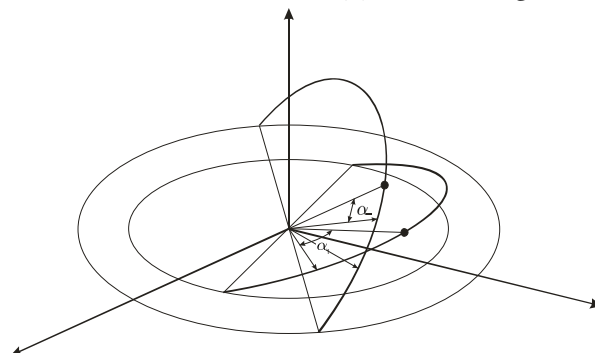
$$\frac{\partial \Delta V}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0 \quad (11)$$

که در پایان این روابط برای سه متغیر مستقل p ، α_1 و α_2 حل خواهند شد.

۴- ارتباط ΔV و زمان با متغیرهای مستقل

برای بدست آوردن ارتباط ΔV و زمان با متغیرهای مستقل نیاز به بیان عوامل میانی و ارتباط آن‌ها با عوامل مستقل است زیرا توابع ΔV و زمان براساس این عوامل میانی مطرح می‌شوند.

می‌شوند. برای مشخص نمودن موقعیت این نقاط از تروآنومالی^۱ استفاده خواهد شد. نمای مدارهای اولیه، هدف و نقاط تلاقی بصورت شکل (۱) است.



شکل (۱): مدارهای اولیه و هدف و نقاط انتقال

هدف، حداقل‌سازی میزان ضربه‌ی مورد نیاز برای انجام انتقال در زمان انتقال مقید و یا نامقید است. برای این منظور باید میزان ضربه‌ی لازم و زمان بر حسب چند متغیر مستقل بدست آیند. این متغیرهای مستقل α_1 ، تروآنومالی نقطه (۱) روی مدار اولیه، α_2 تروآنومالی نقطه (۲) روی مدار هدف و همچنین نیم‌شکم مداری مدار انتقالی، p در نظر گرفته می‌شوند زیرا سایر عوامل میانی و در نتیجه توابع ΔV و زمان برحسب این متغیرهای مستقل مشخص خواهند شد. همان‌طور که در مرجع [۷] نیز به آن اشاره شده است، پیچیده‌گی‌های ریاضی معادلات و هندسی مدارهای اولیه و هدف سبب کاربردی نبودن این معادلات است.

۳- شرایط بهینگی مقید و نامقید زمانی

در این قسمت توابع لازم برای شرایط بهینگی مقید بیان می‌شوند. مقدار کل ضربه لازم با فرض انتقال دوضربه‌ای بصورت رابطه (۱) محاسبه می‌شود.

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = F(\xi) \quad (1)$$

که ΔV ؛ تغییرات کل سرعت در مانور توسط سامانه پیشران، ΔV_1 ؛ تغییرات سرعت در ضربه‌ی اول، ΔV_2 ؛ تغییرات سرعت در ضربه‌ی دوم و ξ ؛ سه متغیر مستقل α_1 و α_2 و p هستند. زمان انتقال نیز بر حسب متغیرهای مستقل بصورت رابطه (۲) بیان می‌شود.

$$\tau = G(\xi) \quad (2)$$

۳-۱- مسئله انتقال بهینه بدون قید زمان

منظور از انتقال بهینه بدون قید زمان، انتقالی است که هدف آن فقط حداقل‌سازی میزان مصرف سوخت باشد و برای زمان انتقال، هیچ قیدی وجود نداشته باشد. برای انتقال بهینه بین دو

۴-۱- استخراج مشتقات جزئی عوامل میانی نسبت به

متغیرهای مستقل

اگر نقاط (۱) و (۲) را موقعیت ضربات در نظر بگیریم، همان‌طور که گفته شد، تروآنومالی‌های آنها با α_1 (در صفحه مداری مدار اولیه) و α_2 (در صفحه مداری مدار نهایی) مشخص می‌شوند (شکل (۱)) که فواصل آنها از مرکز جسم جذاب r_1 و r_2 خواهد بود. از این رو در صفحات مدارهای اولیه و هدف معادله حرکت مسئله دوجسمی بصورت رابطه (۱۲) خواهد بود [۱]:

$$r_1 = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos \alpha_1}, \quad r_2 = \frac{p_2}{1 + e_2 \cos \alpha_2} \quad (12)$$

که در آن e ، خروج از مرکز مدار و p ، نیم‌شکم مداری^۶ است. در صفحه مدار انتقالی، f_1 و f_2 تروآنومالی‌های نقاط (۱) و (۲) در نظر گرفته می‌شوند و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$p = r_1(1 + e_1 \cos f_1) = r_2(1 + e_2 \cos f_2) \quad (13)$$

با حل معادله برای p و e خواهیم داشت:

$$p = \frac{r_1 r_2 (\cos f_1 - \cos f_2)}{r_1 \cos f_1 - r_2 \cos f_2}, \quad e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cos f_1 - r_2 \cos f_2} \quad (14)$$

اگر زاویه مرکزی انتقال که ماهواره در مدار انتقالی می‌پیماید، Δ نامیده شود، خواهیم داشت:

$$\Delta = f_2 - f_1 \quad (15)$$

$$\tan f_1 = \cot \Delta - \frac{r_1(p - r_2)}{r_2(p - r_1) \sin \Delta} \quad (16)$$

$$\tan f_2 = -\cot \Delta + \frac{r_2(p - r_1)}{r_1(p - r_2) \sin \Delta} \quad (17)$$

زاویه‌ی بین صفحه مدار اولیه با صفحه مدار انتقالی با γ_1 و زاویه‌ی صفحه مدار انتقالی با صفحه مدار هدف با γ_2 نامگذاری می‌شود. مقادیر Δ ، γ_1 ، γ_2 و زاویه بین دو صفحه مدارهای اولیه و هدف Φ و دیگر زوایای موجود، از بحث مثلثات کروی که در بخش ۶- به طور کامل بررسی می‌شود، بدست خواهند آمد. اما در این قسمت نیاز به معرفی ارتباط بین این زوایا با سه متغیر مستقل برای بدست آوردن مشتقات آنها است. این روابط بصورت رابطه (۱۸) هستند.

$$\begin{aligned} \cos \Delta &= \cos(\beta_1 - \alpha_1) \cos(\beta_2 - \alpha_2) + \\ &\sin(\beta_1 - \alpha_1) \sin(\beta_2 - \alpha_2) \cos \Phi \\ \cos \Phi &= \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 - \\ &\sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \cos \Delta \\ \sin \gamma_1 &= -\frac{\sin(\beta_2 - \alpha_2)}{\sin \Delta} \sin \Phi \\ \sin \gamma_2 &= \frac{\sin(\beta_1 - \alpha_1)}{\sin \Delta} \sin \Phi \\ \cos \gamma_1 &= \cos \gamma_2 \cos \Phi + \sin \gamma_2 \cos(\beta_2 - \alpha_2) \sin \Phi \\ \cos \gamma_1 \cos \Phi &+ \sin \gamma_1 \cos(\beta_1 - \alpha_1) \sin \Phi \end{aligned} \quad (18)$$

در ابتدا نیاز به مشخص شدن مشتقات جزئی این متغیرها و وابستگی آنها به متغیرهای مستقل است. وابستگی میانی نسبت به متغیرهای مستقل در جدول (۱) آمده است. به‌عنوان مثال همان‌طور که دیده می‌شود، متغیر میانی r_1 فقط به متغیر مستقل α_1 وابسته است.

جدول (۱): وابستگی متغیرهای میانی نسبت به متغیرهای مستقل

متغیرها	توابعی از
r_1	α_1
r_2	α_2
Δ	α_1, α_2
γ_1, γ_2	α_1, α_2
f_1, f_2	α_1, α_2, p
e	α_1, α_2, p

در نتیجه، گرادیان متغیرهای میانی نسبت به متغیرهای مستقل، بر اساس جدول (۱) و معادلات (۱۳) تا (۱۸)، محاسبه می‌شود که پس از انجام عملیات ریاضی و مرتب نمودن و ساده‌سازی معادلات، مشتقات متغیرهای میانی نسبت به متغیرهای مستقل، بصورت روابط (۱۹) تا (۳۰) برای استفاده در بخش بعد، ارائه می‌شوند.

$$\frac{\partial r_1}{\partial \alpha_1} = r_1^2 \frac{e_1}{p_1} \sin \alpha_1, \quad \frac{\partial r_2}{\partial \alpha_2} = r_2^2 \frac{e_2}{p_2} \sin \alpha_2 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1} = \frac{\cos(\beta_1 - \alpha_1) \sin(\beta_2 - \alpha_2) \cos \varphi}{\sin \Delta}$$

$$-\frac{\cos(\beta_2 - \alpha_2) \sin(\beta_1 - \alpha_1)}{\sin \Delta} = -\cos \gamma_1, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_2} = \frac{\cos(\beta_2 - \alpha_2) \sin(\beta_1 - \alpha_1) \cos \varphi}{\sin \Delta}$$

$$-\frac{\cos(\beta_1 - \alpha_1) \sin(\beta_2 - \alpha_2)}{\sin \Delta} = \cos \gamma_2$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} = \frac{\cos \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1} \sin(\beta_2 - \alpha_2) \sin \varphi}{\cos \gamma_1 \sin^2 \Delta} = \sin \gamma_1 \cot \Delta$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} = \left(\frac{\cos(\beta_2 - \alpha_2) \sin \Delta}{\cos \gamma_1 \sin^2 \Delta} + \frac{\cos \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_2} \sin(\beta_2 - \alpha_2)}{\cos \gamma_1 \sin^2 \Delta} \right) \sin \varphi = \frac{\sin \gamma_2}{\sin \Delta} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} = - \left(\frac{\cos(\beta_1 - \alpha_1) \sin \Delta}{\cos \gamma_2 \sin^2 \Delta} + \frac{\cos \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1} \sin(\beta_1 - \alpha_1)}{\cos \gamma_2 \sin^2 \Delta} \right) \sin \varphi = -\frac{\sin \gamma_1}{\sin \Delta} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} = -\frac{\cos \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_2} \sin(\beta_1 - \alpha_1) \sin \varphi}{\cos \gamma_2 \sin^2 \Delta} = -\sin \gamma_2 \cot \Delta$$

$$\frac{\partial e}{\partial p} = - \frac{\left(-r_1 \sin f_1 \frac{\partial f_1}{\partial p} + r_2 \sin f_2 \frac{\partial f_2}{\partial p} \right) (r_2 - r_1)}{(r_1 \cos f_1 - r_2 \cos f_2)^2} \quad (28)$$

$$= \frac{1}{\sin \Delta} \left(\frac{\sin f_2}{r_1} - \frac{\sin f_1}{r_2} \right) = \frac{e}{p} + \frac{\sin f_2 - \sin f_1}{p \sin \Delta}$$

$$\frac{\partial e}{\partial \alpha_1} = \frac{-\frac{\partial r_1}{\partial \alpha_1} (r_1 \cos f_1 - r_2 \cos f_2)}{(r_1 \cos f_1 - r_2 \cos f_2)^2} -$$

$$\frac{\left(\frac{\partial r_1}{\partial \alpha_1} \cos f_1 - \sin f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} r_1 + r_2 \sin f_2 \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_1} \right) (r_2 - r_1)}{(r_1 \cos f_1 - r_2 \cos f_2)^2} \quad (29)$$

$$= \frac{\sin f_2}{\sin \Delta} \left(e \sin f_1 \cos \gamma_1 - \frac{e_1 p}{p_1} \sin \alpha_1 \right)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \alpha_2} = \frac{\frac{\partial r_2}{\partial \alpha_2} (r_1 \cos f_1 - r_2 \cos f_2)}{(r_1 \cos f_1 - r_2 \cos f_2)^2} -$$

$$\frac{\left(-\frac{\partial r_2}{\partial \alpha_2} \cos f_2 + \sin f_2 \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} r_2 - r_1 \sin f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2} \right) (r_2 - r_1)}{(r_1 \cos f_1 - r_2 \cos f_2)^2} \quad (30)$$

$$= -\frac{\sin f_1}{\sin \Delta} \left(e \sin f_2 \cos \gamma_2 - \frac{e_2 p}{p_2} \sin \alpha_2 \right)$$

۴-۲- وابستگی توابع ΔV و زمان انتقال، به متغیرهای میانی

اگر در صفحه حرکت مداری، u ؛ مولفه شعاعی سرعت و v ؛ مولفه انتقالی سرعت باشد، می‌توان نوشت:

$$u = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin f, \quad v = \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \quad (31)$$

که در آن μ ثابت جاذبه است. اگر پانویس‌های + و - بعنوان المان‌های قبل و بعد از ضربه در نظر گرفته شوند، خواهیم داشت.

$$u_1^- = \sqrt{\frac{\mu}{p_1}} e_1 \sin \alpha_1, \quad u_1^+ = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin f_1 \quad (32)$$

$$u_2^- = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin f_2, \quad u_2^+ = \sqrt{\frac{\mu}{p_2}} e_2 \sin \alpha_2 \quad (33)$$

$$v_1^- = \frac{\sqrt{\mu p_1}}{r_1}, \quad v_1^+ = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_1} \quad (34)$$

$$v_2^- = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_2}, \quad v_2^+ = \frac{\sqrt{\mu p_2}}{r_2} \quad (35)$$

برای تغییرات سرعت در صفحه مدار انتقالی از قانون دست راست و سیستم مختصات Ixyz که در آن محور x در امتداد بردار موقعیت، محور y عمود بر آن و در برای حرکت و محور z نیز عمود بر صفحه مداری خواهد بود، استفاده شده است [۳].

برای مولفه x_i خواهیم داشت:

$$x_i = u_i^+ - u_i^- \quad (36)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} = - \frac{\cos^2 f_1 \left[\frac{r_1 r_2 (p - r_1) \sin \Delta - r_1 r_2 (p - r_2) \sin \Delta}{(r_2 (p - r_1) \sin \Delta)^2} \right]}{e^2 r_1 r_2 \sin \Delta} =$$

$$\frac{\cos^2 f_2 - \cos f_1}{ep \sin \Delta} = \frac{\partial f_2}{\partial p} = \frac{\cos^2 f_2 \left[\frac{-r_1 r_2 (p - r_1) \sin \Delta + r_1 r_2 (p - r_2) \sin \Delta}{(r_1 (p - r_2) \sin \Delta)^2} \right]}{ep \sin \Delta} \quad (22)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} = \cos^2 f_1$$

$$\left[\frac{-\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial r_1}{\partial \alpha_1} (p - r_2) r_2 (p - r_1) \sin \Delta}{\sin^2 \Delta - (r_2 (p - r_1) \sin \Delta)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{r_1 r_2 (p - r_2) \left(-\frac{\partial r_1}{\partial \alpha_1} \sin \Delta + \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1} \cos \Delta (p - r_1) \right)}{(r_2 (p - r_1) \sin \Delta)^2} \right] \quad (24)$$

$$= \frac{1}{\sin \Delta} \left(\cos \gamma_1 \cos f_1 \sin f_2 - \frac{e_1 p}{ep_1} \sin \alpha_1 \cos f_2 \right)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2} = \cos^2 f_1$$

$$\left[\frac{-\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial r_2}{\partial \alpha_2} r_1 r_2 (p - r_1) \sin \Delta}{\sin^2 \Delta + (r_2 (p - r_1) \sin \Delta)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{r_1 (p - r_2) (p - r_1) \left(\frac{\partial r_2}{\partial \alpha_2} \sin \Delta + \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_2} r_2 \cos \Delta \right)}{(r_2 (p - r_1) \sin \Delta)^2} \right] \quad (25)$$

$$= -\frac{\cos f_1}{\sin \Delta} \left(\cos \gamma_2 \sin f_2 - \frac{e_2 p}{ep_2} \sin \alpha_2 \right)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \alpha_1} = \cos^2 f_2$$

$$\left[\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial r_1}{\partial \alpha_1} r_1 r_2 (p - r_2) \sin \Delta}{\sin^2 \Delta + (r_1 (p - r_2) \sin \Delta)^2} - \right.$$

$$\left. \frac{r_2 (p - r_2) (p - r_1) \left(\frac{\partial r_1}{\partial \alpha_1} \sin \Delta + \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1} r_1 \cos \Delta \right)}{(r_1 (p - r_2) \sin \Delta)^2} \right] \quad (26)$$

$$= \frac{\cos f_2}{\sin \Delta} \left(\cos \gamma_1 \sin f_1 - \frac{e_1 p}{ep_1} \sin \alpha_1 \right)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} = \cos^2 f_2$$

$$\left[\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial r_2}{\partial \alpha_2} (p - r_1) r_1 (p - r_2) \sin \Delta}{\sin^2 \Delta + (r_1 (p - r_2) \sin \Delta)^2} - \right.$$

$$\left. \frac{r_1 r_2 (p - r_1) \left(-\frac{\partial r_2}{\partial \alpha_2} \sin \Delta + \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_2} \cos \Delta (p - r_2) \right)}{(r_1 (p - r_2) \sin \Delta)^2} \right] \quad (27)$$

$$= -\frac{1}{\sin \Delta} \left(\cos \gamma_2 \cos f_2 \sin f_1 - \frac{e_2 p}{ep_2} \sin \alpha_2 \cos f_1 \right)$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin f}{1+e \cos f} \quad (51)$$

با استفاده از رابطه (52) می‌توان زمان را محاسبه نمود:

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_p) \quad (52)$$

که در آن t ؛ زمان، t_p ؛ زمان عبور از نقطه نزدیکی مداری، μ ؛ ثابت جاذبه جسم جذاب و a ؛ نیم قطر اصلی مدار است که از رابطه (53) محاسبه می‌شود:

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad (53)$$

در پایان زمان انتقال بین ضربات را پس از N بار چرخش کامل روی مدار انتقالی می‌توان از رابطه (54) محاسبه نمود:

$$\tau = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(M_2 - M_1 + 2\pi N) \quad (54)$$

۵- استخراج معادلات بهینگی

برای استخراج معادلات بهینگی نیاز به گرایان توابع ΔV و زمان نسبت به سه متغیر مستقل α_1 ، α_2 ، p است. برای این منظور باید براساس قاعده‌ی مشتقات زنجیره‌ای عمل نمود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \xi} = \sum \frac{1}{\Delta V_i} \left(x_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial h_i^2}{\partial \xi} \right) \quad (55)$$

همچنین می‌توان از کسینوس‌های هادی استفاده نمود:

$$S_i = \frac{x_i}{\Delta V_i}, \quad T_i = \frac{y_i}{\Delta V_i}, \quad W_i = \frac{z_i}{\Delta V_i} \quad (56)$$

که در آن S_i ، T_i و W_i معرف کسینوس‌های هادی هستند. با استفاده از روابط (55) و (56) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \xi} = \sum S_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi} + \frac{1}{2\Delta V_i} \frac{\partial h_i^2}{\partial \xi} \quad (57)$$

مشتق تابع ΔV نسبت به متغیر مستقل p بصورت رابطه (58) است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta V}{\partial p} &= \frac{1}{\Delta V_1} \left(x_1 \frac{\partial x_1}{\partial p} + 0.5 \frac{\partial h_1^2}{\partial p} \right) + \\ &\frac{1}{\Delta V_2} \left(x_2 \frac{\partial x_2}{\partial p} + 0.5 \frac{\partial h_2^2}{\partial p} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

جمله‌های معادله (58) با استفاده از روابط مشتقات جزئی نسبت به متغیر مستقل p قابل محاسبه هستند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial p} &= \\ \frac{\sqrt{\mu}}{p} \left(\left(\frac{\partial e}{\partial p} \sin f_1 + \cos f_1 \frac{\partial f_1}{\partial p} e \right) \sqrt{p} - \frac{1}{2\sqrt{p}} e \sin f_1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \left(e \sin f_1 - 2 \tan \frac{\Delta}{2} \right) \end{aligned} \quad (59)$$

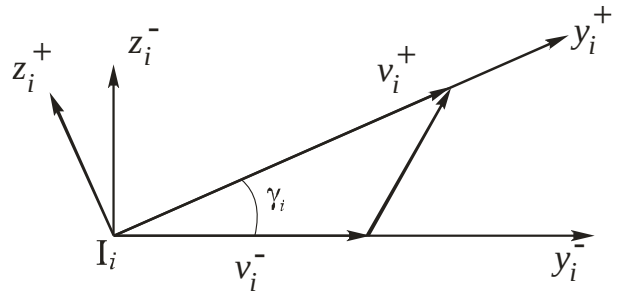
برای مولفه‌های y_i و z_i با توجه به شکل (۲) که در آن دیگرام مولفه‌های سرعت در صفحه افق محلی ترسیم شده است، می‌توان نوشت:

$$y_i^+ = v_i^+ - v_i^- \cos \gamma_i \quad (37)$$

$$z_i^+ = v_i^- \sin \gamma_i \quad (38)$$

$$y_i^- = v_i^+ \cos \gamma_i - v_i^- \quad (39)$$

$$z_i^- = v_i^+ \sin \gamma_i \quad (40)$$



شکل (۲): مولفه‌های سرعت در صفحه افقی در نقاط تلاقی

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$x_1 = \sqrt{\mu} \left(\frac{e}{\sqrt{p}} \sin f_1 - \frac{e_1}{\sqrt{p_1}} \sin \alpha_1 \right) \quad (41)$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{\mu}}{r_1} (\sqrt{p} - \sqrt{p_1} \cos \gamma_1) \quad (42)$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{\mu p_1}}{r_1} \sin \gamma_1 \quad (43)$$

$$x_2 = \sqrt{\mu} \left(\frac{e_2}{\sqrt{p_2}} \sin \alpha_2 - \frac{e}{\sqrt{p}} \sin f_2 \right) \quad (44)$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{\mu}}{r_2} (\sqrt{p_2} \cos \gamma_2 - \sqrt{p}) \quad (45)$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{\mu p_2}}{r_2} \sin \gamma_2 \quad (46)$$

که در نتیجه برای کل ضربه مورد نیاز انتقال می‌توان نوشت:

$$\Delta V = \sum (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{\frac{1}{2}} \quad (47)$$

رابطه (47) از طریق متغیرهای میانی e ، r_i ، γ_i ، f_i با متغیرهای مستقل α_1 ، α_2 ، p وابستگی دارند. برای مشتق گرفتن نسبت به متغیرهای مستقل، ساده‌تر است ΔV به صورت رابطه (48) نوشته شود:

$$\Delta V_i = (x_i^2 + h_i^2)^{\frac{1}{2}} \quad (48)$$

که در آن h_i عبارت است از:

$$h_i^2 = y_i^2 + z_i^2 = \frac{\mu}{r_i^2} (p + p_i - 2\sqrt{pp_i} \cos \gamma_i) \quad (49)$$

برای محاسبه زمان باید از معادله کپلر استفاده نمود [۳]:

$$M = E - e \sin E \quad (50)$$

که در آن M ؛ مین‌آنومالی^۷ و E ؛ اکسنتریک آنومالی^۸ است که بر حسب تروآنومالی بصورت رابطه (51) قابل محاسبه است:

بطور مشابه، اگر جمله‌های (۶۳) با روابط ارائه شده در (۶۴) جایگزین شود، رابطه مشتق تابع ΔV نسبت به α_1 بدست خواهد آمد:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_1} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left[\left(\frac{S_1 \cos \Delta - S_2 + T_1}{\sin \Delta} \right) \times \left(\operatorname{esin} f_1 \cos \gamma_1 - \frac{e_1}{p_1} p \sin \alpha_1 \right) + S_1 \left(\sqrt{\frac{p}{p_1}} - \cos \gamma_1 \right) + \operatorname{sin} \gamma_1 \left(\left(\frac{W_1 - W_2}{\sin \Delta} \right) q_2 - \frac{W_1 \tan \Delta}{2} \right) \right] \quad (65)$$

بطور مشابه برای مشتقات مربوط به α_2 می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{\Delta V_1} \left(x_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} + 0.5 \frac{\partial h_1^2}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{1}{\Delta V_2} \left(x_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} + 0.5 \frac{\partial h_2^2}{\partial \alpha_2} \right) \quad (66)$$

که با استفاده از عملیات مشتق‌گیری و ساده‌سازی مشابه قبل می‌توان برای جمله‌های آن نوشت:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} = \sqrt{\mu} \left[\frac{1}{\sqrt{p}} \left(\frac{\partial e}{\partial \alpha_2} \sin f_1 + \cos f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2} e \right) \right]$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} = \sqrt{\mu} \left[\frac{e_2}{\sqrt{p_2}} \cos \alpha_2 - \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\frac{\partial e}{\partial \alpha_2} \sin f_2 + \cos f_2 \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} e \right) \right]$$

$$\frac{\partial h_1^2}{\partial \alpha_2} = \frac{\mu}{r_1^2} 2\sqrt{pp_1} \sin \gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} \quad (67)$$

$$\frac{\partial h_2^2}{\partial \alpha_2} = \mu \frac{\left(2\sqrt{pp_2} r_2 \sin \gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} - 2 \frac{\partial r_2}{\partial \alpha_2} (p + p_2 - 2\sqrt{pp_2} \cos \gamma_2) \right)}{r_2^3}$$

در پایان نیز با جایگذاری جمله‌های رابطه (۶۶) با روابط ارائه شده در (۶۷)، رابطه (۶۸) به‌دست می‌آید.

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_2} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \left[\left(\frac{S_1 - S_2 \cos \Delta}{\sin \Delta} + T_2 \right) \left(\operatorname{esin} f_2 \cos \gamma_2 - \frac{e_2}{p_2} p \sin \alpha_2 \right) + S_2 \left(\sqrt{\frac{p}{p_2}} - \cos \gamma_2 \right) + \operatorname{sin} \gamma_2 \left(\left(\frac{W_2 - W_1}{\sin \Delta} \right) q_1 - \frac{W_2 \tan \Delta}{2} \right) \right] \quad (68)$$

تا اینجا به استخراج روابط مشتق $\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_1}$ و $\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_2}$ پرداخته شد.

همچنین برای تابع زمان که از معادله کپلر بدست آمد

$$\frac{\partial x_2}{\partial p} = \frac{\sqrt{\mu}}{p} \left(- \left(\frac{\partial e}{\partial p} \sin f_2 + \cos f_2 \frac{\partial f_2}{\partial p} e \right) \sqrt{p} + \frac{1}{2\sqrt{p}} \operatorname{esin} f_2 \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \left(\operatorname{esin} f_2 + \frac{2 \tan \Delta}{2} \right)$$

و

$$\frac{\partial h_1^2}{\partial p} = \frac{\mu}{r_1^2} \left(1 - \frac{\sqrt{p_1} \cos \gamma_1}{\sqrt{p}} \right) = \frac{y_1}{r_1} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \quad (69)$$

$$\frac{\partial h_2^2}{\partial p} = \frac{\mu}{r_2^2} \left(1 - \frac{\sqrt{p_2} \cos \gamma_2}{\sqrt{p}} \right) = -\frac{y_2}{r_2} \sqrt{\frac{\mu}{p}}$$

با جایگذاری (۵۹) و (۶۰) در (۵۸) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial p} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \left[q_1 \left(\frac{S_1 \cos \Delta - S_2 + T_1}{\sin \Delta} \right) - q_2 \left(\frac{S_1 - S_2 \cos \Delta}{\sin \Delta} + T_2 \right) - \frac{(S_2 + S_1) \tan \Delta}{2} \right] \quad (71)$$

که q_i عبارت است از:

$$q_i = \frac{p_i}{r_i} = (1 + e \cos f_i) \quad (72)$$

بطور مشابه برای مشتق تابع ΔV نسبت به α_1 می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{\Delta V_1} \left(x_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} + 0.5 \frac{\partial h_1^2}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{1}{\Delta V_2} \left(x_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} + 0.5 \frac{\partial h_2^2}{\partial \alpha_1} \right) \quad (73)$$

که جمله‌های آن از روابط (۶۴) بدست خواهند آمد:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} = \sqrt{\mu} \left[\frac{1}{\sqrt{p}} \left(\frac{\partial e}{\partial \alpha_1} \sin f_1 + \cos f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} e \right) - \frac{e_1}{\sqrt{p_1}} \cos \alpha_1 \right]$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left[\frac{\operatorname{esin} f_2 \cos \gamma_1}{\sin \Delta} - \frac{e_1}{p_1} p \sin \alpha_1 \cot \Delta - e_1 \sqrt{\frac{p}{p_1}} \cos \alpha_1 \right]$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} = \sqrt{\mu} \left[-\frac{1}{\sqrt{p}} \left(\frac{\partial e}{\partial \alpha_1} \sin f_2 + \cos f_2 \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_1} e \right) \right] = -\frac{1}{\sin \Delta} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left[\operatorname{esin} f_1 \cos \gamma_1 - \frac{e_1}{p_1} p \sin \alpha_1 \right]$$

$$\frac{\partial h_1^2}{\partial \alpha_1} = \mu \frac{\left(2\sqrt{pp_1} r_1 \sin \gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} - 2 \frac{\partial r_1}{\partial \alpha_1} (p + p_1 - 2\sqrt{pp_1} \cos \gamma_1) \right)}{r_1^3} =$$

$$2\sqrt{\frac{\mu}{p}} \left[\frac{z_1 q_1 \sin \gamma_1 \cot \Delta - \frac{e_1}{p_1} y_1 p \sin \alpha_1}{\sqrt{\frac{\mu}{p}} q_1 \left(1 - \sqrt{\frac{p}{p_1}} \cos \alpha_1 \right)} e_1 \sin \alpha_1 \right] \quad (74)$$

$$\frac{\partial h_2^2}{\partial \alpha_1} = \frac{\mu}{r_2^2} 2\sqrt{pp_2} \sin \gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} = -2 \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\sin \gamma_1}{\sin \Delta} q_2 z_2$$

می‌توان نسبت به متغیرهای مستقل مشتق گرفت و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(a^{\frac{3}{2}} M_2 \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a^{\frac{3}{2}} M_1 \right) + 2\pi N \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a^{\frac{3}{2}} \right) \right] \quad (79)$$

در نتیجه مشتقات بر اساس $a^{\frac{3}{2}}$ و M مورد نیاز هستند. بر اساس رابطه کپلر، M تابعی از e و f است و براساس جدول (۱) تابعی از ۳ متغیر α_1 ، α_2 و p خواهد بود. می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial M}{\partial \xi} = (1 - e \cos E) \frac{\partial E}{\partial \xi} - \sin E \frac{\partial e}{\partial \xi} = \frac{(1 - e^2)}{q} \frac{\partial E}{\partial \xi} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{q} \sin f \frac{\partial e}{\partial \xi} \quad (80)$$

سپس

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{q} \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\sin f}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial e}{\partial \xi} \quad (81)$$

با جایگذاری (۷۱) در (۷۰) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial M}{\partial \xi} = \frac{(1 - e^2)}{q} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{q} \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\sin f}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial e}{\partial \xi} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{q} \sin f \frac{\partial e}{\partial \xi} = \quad (82)$$

$$\frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{q^2} \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\sqrt{1 - e^2} (q + 1)}{q^2} \sin f \frac{\partial e}{\partial \xi}$$

برای جمله نیم قطر اصلی نیز مانند روند فوق می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} a^{\frac{3}{2}} = \frac{3ep^{\frac{3}{2}}}{(1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \frac{\partial e}{\partial \alpha} \quad (83)$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(a^{\frac{3}{2}} M \right) = a^{\frac{3}{2}} \frac{\partial M}{\partial \alpha} + M \frac{\partial a^{\frac{3}{2}}}{\partial \alpha} = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{q^2} \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{q + 1}{1 - e^2} \sin f \frac{\partial e}{\partial \alpha} \right] + \frac{3eMp^{\frac{3}{2}}}{(1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \frac{\partial e}{\partial \alpha} \quad (84)$$

در پایان:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \frac{1}{q_2^2} \left[\frac{\partial f_2}{\partial \alpha} - \frac{1}{e} \cot f_2 \frac{\partial e}{\partial \alpha} \right] - \frac{1}{q_1^2} \left[\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} - \frac{1}{e} \cot f_1 \frac{\partial e}{\partial \alpha} \right] + \frac{1}{e} Y \sin \Delta \frac{\partial e}{\partial \alpha} \right\} \quad (85)$$

که در آن Y ، بصورت رابطه (۷۶) تعریف شده است:

$$Y = \frac{1}{(1 - e^2) \sin \Delta} \left[3e^2 r \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} - 2e \left(\frac{1}{q_2 \sin f_2} - \frac{1}{q_1 \sin f_1} \right) + \cot f_2 - \cot f_1 \right] \quad (86)$$

در نتیجه با توجه به رابطه (۷۵) مشتق تابع زمان نسبت به α_1 و α_2 بدست خواهد آمد:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{r_1^2 e_1 \sin \alpha_1}{pp_1 \sin f_1} + Y \sin \Delta \frac{\partial e}{\partial \alpha_1} \right] \quad (87)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{r_2^2 e_2 \sin \alpha_2}{pp_2 \sin f_2} + Y \sin \Delta \frac{\partial e}{\partial \alpha_2} \right] \quad (88)$$

با جایگذاری جمله‌های $\frac{\partial e}{\partial \alpha_1}$ و $\frac{\partial e}{\partial \alpha_2}$ از روابط (۲۹) و (۳۰) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha_1} = \frac{r_1 V_1}{e \mu} \sqrt{\frac{p^3}{p_1}} \left[-\frac{W_1 r_1 e_1 \sin \alpha_1}{q_1 p_1 \sin f_1 \sin \gamma_1} + Y \sin f_2 (S_1 q_1 - T_1 e \sin f_1) \right] \quad (89)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha_2} = \frac{r_2 V_2}{e \mu} \sqrt{\frac{p^3}{p_2}} \left[-\frac{W_2 r_2 e_2 \sin \alpha_2}{q_2 p_2 \sin f_2 \sin \gamma_2} + Y \sin f_1 (S_2 q_2 - T_2 e \sin f_2) \right] \quad (90)$$

برای مشتق $a^{3/2}$ نسبت به p می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial a^{\frac{3}{2}}}{\partial p} = \frac{3\sqrt{p}A}{2(1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (91)$$

که در آن A بصورت رابطه (۸۲) تعریف می‌شود:

$$A = (1 - e^2) + 2ep \frac{\partial e}{\partial p} = 1 + e^2 + \frac{2e(\sin f_2 - \sin f_1)}{\sin \Delta} \quad (92)$$

با ترکیب (۸۱) و (۸۲) با (۷۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial a^{\frac{3}{2}} M}{\partial p} = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{q^2} \left[\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{(q + 1)}{2ep} \sin f \right] + \frac{\sqrt{p}A}{2e(1 - e^2)} \left[\frac{3eM}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(q + 1)}{q^2} \sin f \right] \quad (93)$$

در نتیجه پس از ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(a^{\frac{3}{2}} M \right) = \frac{\sqrt{p}}{eq^2} \left[\frac{1}{\sin f} - \cot f \frac{\sin f_2 - \sin f_1}{\sin \Delta} + \frac{(\cos f_2 - \cos f_1)}{\sin \Delta} \right] - \frac{\sqrt{p}}{2e^2} \cot f + \frac{\sqrt{p}A}{2e(1 - e^2)} \left[\frac{3eM}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{p \cos f - 2er}{p \sin f} \right] \quad (94)$$

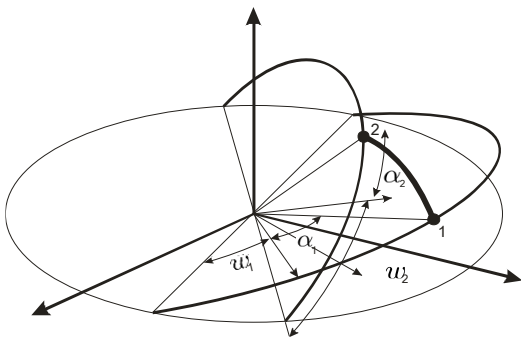
با قرار دادن $f = f_1$ یا $f = f_2$ در معادله (۹۴)، جمله اول از بین خواهد رفت:

$$\frac{\partial \tau}{\partial p} = \frac{1}{2e^2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \cot f_1 - \cot f_2 + Y \left[(1 + e^2) \sin \Delta + 2e(\sin f_2 - \sin f_1) \right] \right\} \quad (95)$$

در نتیجه در مسائل بهینه مقید، روابط (۱۰) و (۱۱) به روابط (۸۶) و (۸۷) تبدیل می‌شوند:

$$(X_1 + YZ \sin f_2)(S_1 q_1 - T_1 e \sin f_1) + S_1 T_1 + W_1 \left[\frac{W_1 - W_2}{\sin \Delta} q_2 - W_1 \tan \frac{\Delta}{2} \right] - \frac{W_1 Z e r_1 e_1 \sin \alpha_1}{q_1 p_1 \sin f_1 \sin \gamma_1} = 0 \quad (96)$$

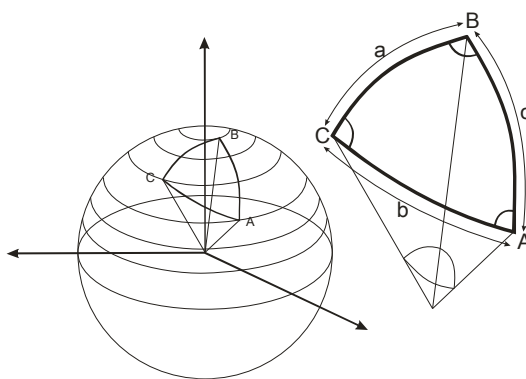
تروآنومالی نقطه تقاطع تصویر مدارهای اولیه و هدف روی کره واحد، روی مدار اولیه β_1 و روی مدار هدف، β_2 باشد. زاویه بین دو صفحه مدارهای اولیه و هدف، Φ در نظر گرفته می‌شود.



شکل (۴): تصویر مدار انتقالی روی کره واحد از نقطه (۱) به (۲) برای بدست آوردن زوایای γ_1 ، γ_2 و Δ ، باید مثلث کروی شامل نقاط (۱)، (۲) و نقطه تقاطع تصویر دو مدار اولیه و هدف را حل نمود. منظور از حل یک مثلث کروی، دستیابی به مقادیر تعدادی از زوایا در آن مثلث کروی با داشتن زوایای دیگر است. برای روشن شدن بحث، به موضوع مثلثات کروی پرداخته می‌شود.

۶-۱- مثلثات کروی

بحث مثلثات کروی، از قرارگیری سه نقطه روی یک کره آغاز می‌شود. زوایای گوشه‌ای این سه نقطه مشابه زوایای مثلث بوده و به اختصار «زاویه» نامیده می‌شوند. زوایای مرکزی که از رسم خطوط شعاعی این سه نقطه بدست خواهند آمد، نیز به اختصار «کمان» نامیده می‌شوند. مقادیر زوایا و کمان‌ها با یکدیگر ارتباط دارند. شکل (۵) نمایی از موقعیت این سه نقطه و زوایای مورد بحث را نشان می‌دهد.



شکل (۵): قرارگیری سه نقطه روی یک کره و تشکیل مثلث کروی مقادیر سینوس این زوایا بصورت روابط (۸۹) تا (۹۱) با یکدیگر ارتباط دارند [۸] و [۹]:

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A \quad (89)$$

$$\sin a \sin C = \sin c \sin A \quad (90)$$

$$(X_2 + YZe \sin f_1)(S_2 q_2 - T_2 e \sin f_2) + S_2 T_2 - W_2 \left[\frac{W_2 - W_1}{\sin \Delta} q_1 - W_2 \tan \frac{\Delta}{2} \right] + \frac{W_2 Z e r_2 \sin \alpha_2}{q_2 p_2 \sin f_2 \sin \gamma_2} = 0 \quad (87)$$

که در آنها Z عبارت است از:

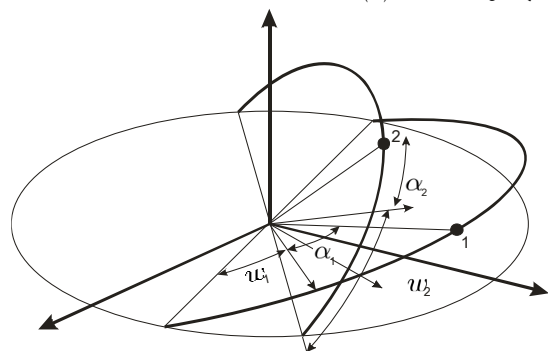
$$Z = \frac{q_2 X_2 - q_1 X_1 + (S_1 + S_2) \tan \frac{\Delta}{2}}{\cot f_1 - \cot f_2 + Y \left[\frac{(1+e^2) \sin \Delta + 2e(\sin f_2 - \sin f_1)}{2} \right]} \quad (88)$$

همچنین برای مسائل نامقید زمانی، همان‌طور که در بخش ۳-۱- اشاره شد، کافی است روابط (۵۸)، (۶۳) و (۶۶) برابر صفر شوند.

در مرجع [۷] گفته شده است که برای محاسبات عملی، مشکل اصلی بدست آوردن زوایای مثلثاتی و توابعی است که شامل آنها هستند. در این مقاله برای اولین بار با استفاده از هندسه مثلثات کروی به بیان حالت‌های ممکن قرارگیری مدار اولیه، هدف و انتقالی نسبت به یکدیگر و بررسی کامل هندسی و بدست آوردن زوایای مثلثاتی، در بخش بعدی پرداخته خواهد شد.

۶-۲- بررسی هندسه مدارهای اولیه و هدف

همان‌طور که در بخش قبل نیز اشاره شد، مشکل اصلی بدست آوردن زوایای مثلثاتی است. زوایایی مانند زاویه بین دو صفحه، تروآنومالی نقطه تقاطع مدارها روی مدارهای اولیه و هدف، مقدار زاویه‌ای که روی مدار انتقالی پیموده خواهد شد و غیره. بنابراین می‌توان برای بدست آوردن زوایا، از تصویر مدارهای اولیه و هدف به روی کره‌ای به شعاع واحد استفاده نمود. تصویر مدارهای اولیه و هدف روی کره‌ای به شعاع واحد به فهم هندسه مسئله کمک می‌نماید. تصویر مدارهای اولیه و هدف بصورت شکل (۳) است:



شکل (۳): تصویر مدارهای اولیه و هدف و نقاط انتقال روی کره واحد

تصویر مدار انتقالی روی کره واحد نیز از نقطه (۱) به (۲)، به صورت شکل (۴) فرض می‌شود.

در شکل (۴)، ω_1 ؛ آرگومان نقطه حضیض مدار اولیه و ω_2 ؛ آرگومان نقطه حضیض مدار دوم است. همچنین فرض می‌شود

$$\sin b \sin C = \sin c \sin B \quad (91)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad (92)$$

همچنین مقادیر کسینوس این زوایا نیز بصورت روابط (93) تا (95) با یکدیگر در ارتباط هستند [9] و [10].

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (93)$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \quad (94)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \quad (95)$$

از روابط فوق می‌توان نوشت:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad (96)$$

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \quad (97)$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \quad (98)$$

برای حل روابط بالا نیاز به داشتن ۳ عامل از ۶ عامل است. با توجه به اینکه کدامیک از عامل معلوم باشند، تعداد پاسخ‌ها و روابط مورد نیاز متفاوت خواهد بود. برای سه عامل معلوم، ۶ حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد [11].

۱) زاویه - زاویه - زاویه: سه زاویه موجود و کمان‌ها خواسته شده باشد.

۲) زاویه - کمان - زاویه: دو زاویه و کمان بین آنها موجود و دیگر زوایا خواسته شده باشد.

۳) کمان - زاویه - زاویه: یک کمان و دو زاویه روبرو موجود و دیگر زوایا خواسته شده باشد.

۴) کمان - کمان - زاویه: دو کمان و زاویه روبروی آنها موجود و دو زاویه و کمان دیگر خواسته شده باشد.

۵) کمان - زاویه - کمان: دو کمان و زاویه بین آنها موجود و دو زاویه دیگر و کمان بین آنها خواسته شده باشد.

۶) کمان - کمان - کمان: سه کمان موجود و سه زاویه خواسته شده باشد.

در حالت‌های فوق مسئله می‌تواند ۰ یا ۲ پاسخ داشته باشد. در جدول (۲) این شش حالت به همراه تعداد پاسخ‌ها آورده شده است.

جدول (۲): شش حالت ممکن در مثلثات کروی و تعداد پاسخ‌ها

حالت	زوایای داده شده	زوایای خواسته شده	تعداد پاسخ‌ها
۱	a, b, c	A, B, C	۰ یا ۲
۲	a, C, b	A, c, B	۲ پاسخ
۳	a, b, A	B, c, C	۰ یا ۲
۴	A, B, a	b, c, C	۰ یا ۲
۵	A, c, B	a, b, C	۲ پاسخ
۶	A, B, C	a, b, c	۰ یا ۲

از بین حالت‌های مختلف، دو حالت (۲) و (۵) کارایی

بیش‌تری دارند. این دو حالت، دو پاسخ مجزا دارند که در مثال عددی علت وجود این دو پاسخ و کارایی آنها بیان می‌شود.

۶-۲- کاربرد مثلثات کروی در یافتن زوایای Φ ، β_1 و β_2

هندسه مدارهای اولیه و هدف و همچنین زوایای Φ ، β_1 و β_2 در شکل (۶) آمده است. گفتنی است که مدارهای اولیه و هدف در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌نمایند. نقطه‌ای باید در نظر گرفته شود که مدار هدف نسبت به مدار اولیه در موقعیت بالا آمدن^۱ باشد. در شکل (۶)، Ω ؛ طول زاویه‌ای گره‌ی صعودی، i زاویه میل صفحه مداری و ω ؛ آرگومان نقطه حضیض مداری هستند که این سه زاویه بیان‌کننده مدار، در فضای سه بعدی هستند. با مشخص بودن i_1 ، i_2 و Ω_1 یک مثلث کروی وجود خواهد داشت که دو زاویه و کمان بین آنها مشخص است و به دنبال یافتن دو کمان ($\omega_1 + \beta_1$ و $\omega_2 + \beta_2$) و زاویه دیگر، (Φ : زاویه بین دو صفحه) هستیم و این حالت (زاویه - کمان - زاویه)، حالت دوم در جدول (۲) است. یکی از این پاسخ‌ها، پاسخی است که ما به آن نیاز خواهیم داشت و دیگری مکمل این پاسخ است. چگونگی انتخاب صحیح این پاسخ به مقادیر i_1 ، i_2 ، Ω_1 و Ω_2 بستگی کامل دارد که در این قسمت به تقسیم‌بندی آنها اشاره خواهد شد.

درحالت کلی موقعیت قرارگیری دو مدار به دو دسته کلی تقسیم‌بندی می‌شود: ۱) $\Omega_2 > \Omega_1$ و ۲) $\Omega_2 < \Omega_1$. هر کدام از این حالت‌ها می‌توانند ۸ حالت مختلف داشته باشند.

این حالت‌ها عبارتند از:

الف) $\Omega_2 > \Omega_1$

$$i_1 > i_2 \text{ و } \Omega_2 - \Omega_1 < 0$$

$$i_1 < i_2 \text{ و } \Omega_2 - \Omega_1 < 0$$

$$i_1 > i_2 \text{ و } \Omega_2 - \Omega_1 < 0$$

$$i_1 < i_2 \text{ و } \Omega_2 - \Omega_1 < 0$$

$$i_1 > i_2 \text{ و } \Omega_2 - \Omega_1 > 0$$

$$i_1 < i_2 \text{ و } \Omega_2 - \Omega_1 > 0$$

$$i_1 > i_2 \text{ و } \Omega_2 - \Omega_1 > 0$$

$$i_1 < i_2 \text{ و } \Omega_2 - \Omega_1 > 0$$

ب) $\Omega_2 < \Omega_1$

$$i_1 > i_2 \text{ و } \Omega_1 - \Omega_2 < 0$$

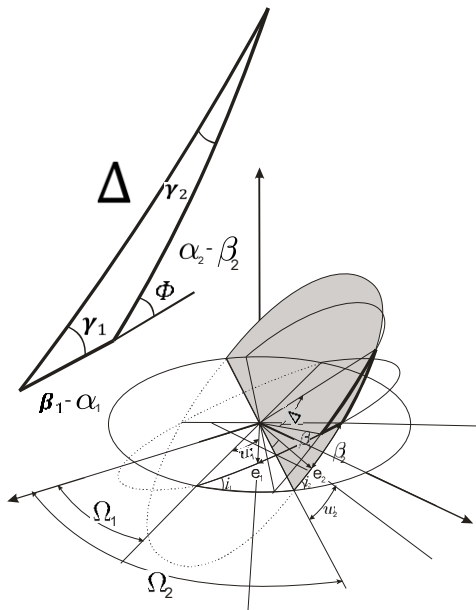
$$i_1 < i_2 \text{ و } \Omega_1 - \Omega_2 < 0$$

$$i_1 > i_2 \text{ و } \Omega_1 - \Omega_2 < 0$$

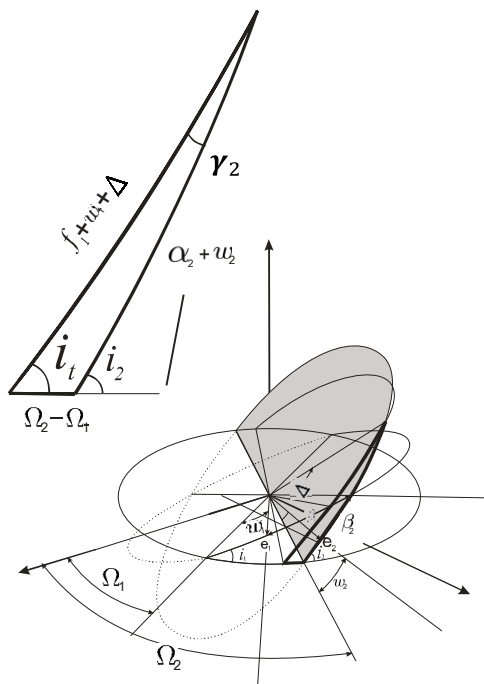
$$i_1 < i_2 \text{ و } \Omega_1 - \Omega_2 < 0$$



انتقالی نسبت به یکی از مدارهای اولیه و یا هدف در نظر گرفته شود. که در اینجا، مدار انتقالی نسبت به مدار هدف در نظر گرفته می‌شود. نمای مثلث کروی حاصل بصورت شکل (۸) است.



شکل (۷): هندسه مدار انتقالی و زوایای γ_1 , γ_2 و Δ



شکل (۸): عوامل مدار انتقالی و تشکیل مثلث کروی

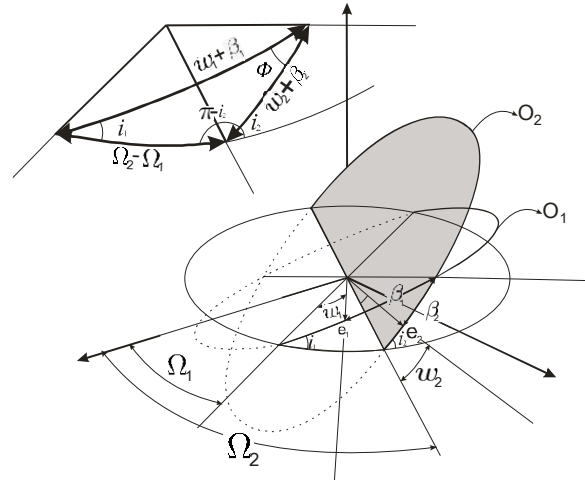
در این صورت همان‌طور که در شکل (۸) دیده می‌شود، یک مثلث کروی از نوع زاویه - کمان - زاویه خواهیم داشت که زاویه‌های $\pi - i_2$ و γ_2 و کمان بین آنها یعنی $\alpha_2 + \omega_2$ مشخص است و به دنبال به دست آوردن کمان‌های دیگر و زاویه بین آنها هستیم که پس از یافتن آنها، عوامل مداری

$$i_2 \& i_1 > 0 \text{ و } \Omega_1 - \Omega_2 > 180$$

$$i_2 < 0 \text{ و } i_1 > 0 \text{ و } \Omega_1 - \Omega_2 > 180$$

$$i_2 > 0 \text{ و } i_1 < 0 \text{ و } \Omega_1 - \Omega_2 > 180$$

$$i_2 \& i_1 < 0 \text{ و } \Omega_1 - \Omega_2 > 180$$



شکل (۶): هندسه مدارهای اولیه، هدف و زوایای β_1 , β_2 و Φ

در هر کدام از این حالت‌ها، موقعیت قرارگیری مثلث کروی متفاوت است. نکته مهم این است که هنگامی که یک مدار 180° درجه بیشتر شود معادل این است که زاویه میل صفحه مداری قرینه شده باشد و برعکس. همچنین می‌توان گفت اگر هر دو شرط بطور هم‌زمان باشند، یعنی هم Ω یک مدار 180° درجه بیشتر گردد و هم زاویه میل صفحه مداری قرینه شود، همان مدار اولی بدست خواهد آمد.

۳-۶ کاربرد مثلثات کروی در یافتن زوایای γ_1 , γ_2 و Δ

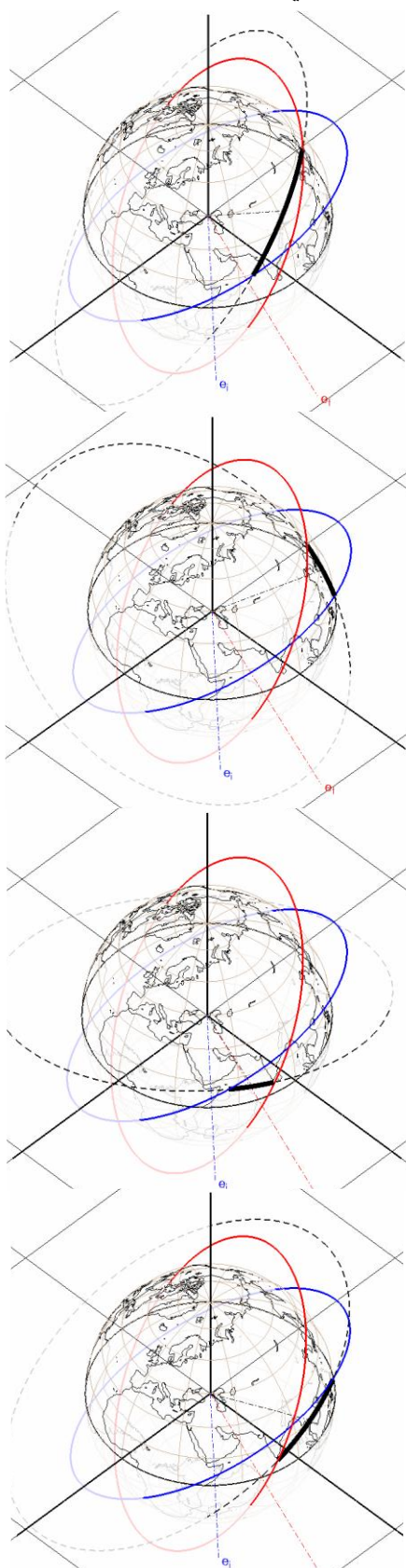
برای بدست آوردن مقادیر زوایای γ_1 , γ_2 و Δ نیاز به بررسی هندسی مدار انتقالی است. هندسه مدار انتقالی و چگونگی تشکیل مثلث کروی در شکل (۷) آمده است. زوایای $\pi - \varphi$ و $\beta_1 - \alpha_1$ تشکیل یک مثلث کروی را می‌دهند. در واقع این حالت مشخص بودن دو کمان و زاویه‌ی بین آنهاست که حالت پنجم (کمان - زاویه - کمان)، از بخش ۶-۱ است. در این قسمت چهار حالت مختلف اساسی بررسی می‌شود. این چهار حالت بسته به مقادیر α_1 و α_2 نسبت به β_1 و β_2 شکل گرفته‌اند. گفتنی است هر کدام از این ۴ حالت اصلی به ۴ حالت فرعی نیز تقسیم‌بندی می‌شوند. هندسه این چهار حالت اصلی در شکل (۹) آمده است.

۴-۶ کاربرد مثلثات کروی در یافتن عوامل مداری

مدار انتقالی

برای بدست آوردن مقادیر عوامل مدار انتقالی باید مدار

فضا و همچنین زمان انتقال بین آنهاست. در اینجا زمان انتقال بین دو نقطه ۲۵۰۰ ثانیه است.



شکل (۹): چهار حالت اساسی قرارگیری مدار انتقالی نسبت به مدارهای اولیه و هدف

ω_t, i_t, Ω_t با مشخص بودن مقدار f_1 براحتی قابل استخراج هستند.

۷- مثال عددی

در این قسمت با استفاده از کد نوشته شده در محیط نرم افزار مطلب، برای یک مثال عددی، مسئله انتقال بهینه ضربه‌ای بین مداری در فضای سه بعدی در دو حالت مقید و نامقید زمانی حل شده است. این مسئله، انتقال بهینه از مدار اولیه به مدار هدف با مشخصات داده شده که در جدول (۳) آمده است، در دو حالت الف) انتقال مقید زمانی با زمان انتقال ۲۵۰۰ ثانیه و ب) انتقال بدون قید زمان حل شده است.

جدول (۳): مشخصات مدارهای اولیه و هدف

	i	Ω	ω	P(km)	e
مدار اولیه	۳۰	۲۰	۳۰	۸۰۰۰	۰/۲
مدار هدف	۳۵	۶۰	۱۰	۱۰۰۰۰	۰/۵

الف) انتقال مقید زمانی با زمان انتقال ۲۵۰۰ ثانیه:

در این صورت لازم است تا معادلات (۸۶) و (۸۷) به همراه قید زمان ارضا شوند. هندسه مدار انتقالی پاسخ بصورت شکل (۱۰) خواهد بود. عوامل مدار انتقالی و میزان ضربات لازم به شرح جدول (۴) است.

جدول (۴): عوامل مدار انتقالی برای انتقال مقید زمانی

عوامل	مقدار
ضربه‌ی اول، Δv_1	$۳/۳۷۵۶ \left(\frac{km}{s}\right)$
ضربه‌ی دوم، Δv_2	$۰/۰۹۰۶۷ \left(\frac{km}{s}\right)$
ضربه‌ی کل، Δv_T	$۳/۴۶۶۳ \left(\frac{km}{s}\right)$
زمان انتقال	۲۵۰۰ (s)
زاویه بین صفحات مداری اول و دوم، φ	۲۱/۷۰۵۲
تروآنومالی تقاطع مداری مدار اول، β_1	۶۴/۵۰۶۳
تروآنومالی تقاطع مداری مدار دوم، β_2	۵۰/۳۴۶
آرگومان نقطه حضیض مدار انتقالی، ω	۸/۵۷۸۲
زاویه میل صفحه مداری مدار انتقالی، i	۳۵/۶۴۱۷
مدار انتقالی، Ω	۵۹/۰۷۷۶
زاویه مرکزی روی مدار انتقالی، Δ	۸۱/۶۲۴۷
زاویه تغییر صفحه در ضربه اول، γ_1	۲۱/۵۶۸۷
زاویه تغییر صفحه در ضربه دوم، γ_2	۰/۸۳۴۴
خروج از مرکز مدار انتقالی، e	۰/۵۰۹۶۲

برای اطمینان بیشتر از درستی پاسخ، مقادیر بدست آمده با حل مسئله لمبرت مقایسه شده است. گفتنی است که در مسئله لمبرت فقط ورودی‌های مسئله موقعیت نقاط اولیه و هدف در

اساس کار به این صورت است که؛ از نقطه‌ای مشخص روی مدار اولیه به نقطه‌ای مشخص روی مدار هدف با مقادیر مختلف نیم‌شکم مداری، انتقال انجام شود. در اینصورت فقط یکی از نیم‌شکم‌های انتخاب شده، کم‌ترین میزان ضربه‌ی مورد نیاز را ارائه می‌نماید. این فرایند می‌تواند برای نقاط مختلف از مدار اولیه و هدف تکرار شود و در نتیجه برای این نقاط، مسیر انتقالی بهینه بدست آید. اگر نقاط در نظر گرفته شده بصورت قابل قبول، کل مدار اولیه و هدف را پوشش دهند، می‌توان به پاسخ بهینه‌ی کلی رسید. برای این مثال بخصوص، مقادیر α_1 و α_2 بین -180 تا 180 درجه با فواصل 1 درجه و همچنین مقدار p بین مقادیر 8000 تا 10000 با فواصل 10 کیلومتر که نیم‌شکم‌های مداری مدارهای اولیه و هدف هستند، تغییر نموده و رفتار تابع Δv_T بر حسب تغییرات α_1 و α_2 در نیم‌شکم‌های مداری بصورت شکل (۱۱) رسم شده است

همان‌طور که در شکل (۱۲) و شکل (۱۴) دیده می‌شود، بهینه‌ترین پاسخ به ازای مقادیر تقریبی $\alpha_1 = 45$ و $\alpha_2 = -125$ بدست می‌آیند که برای این مقادیر α_1 و α_2 مقدار تقریبی نیم‌شکم مداری حدود 9870 کیلومتر است. با در نظر گرفتن این مقادیر بعنوان حدس اولیه برای حل معادلات، مقادیر دقیق پاسخ، بدست خواهند آمد که در این‌صورت هندسه مدار انتقالی در شکل (۱۳) آمده است. همچنین عوامل انتقال بصورت جدول (۶) است.

همچنین برای موقعیت دو نقطه از فضا، مقادیر α_1 و α_2 را در عوامل مدارهای اولیه و هدف لحاظ نموده و موقعیت برداری در مختصات x, y, z ایجاد شده‌اند که بصورت زیر می‌باشند:

$$r_1 = [-2439/0.2 \ 5852/15 \ 3656/60] (km)$$

$$r_2 = [-2439/0.2 \ 5852/15 \ 3656/60] (km)$$

در جدول (۵)، پاسخ‌بدست آمده با پاسخ مسئله لمبرت

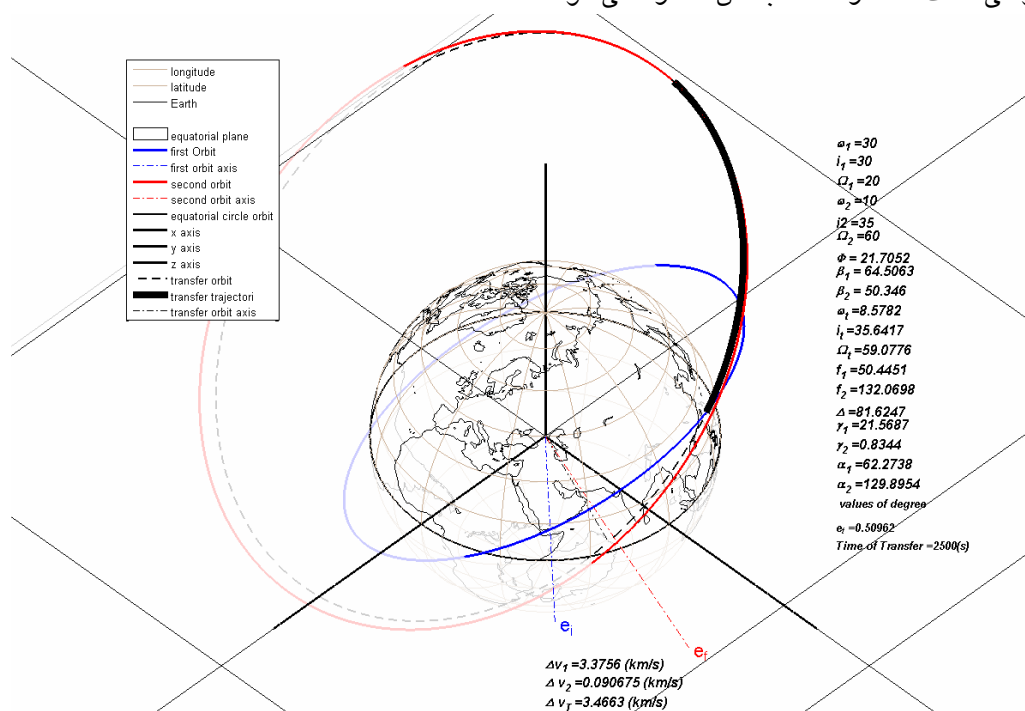
مقایسه شده است

جدول (۵): مقایسه پاسخ‌های بدست آمده با پاسخ لمبرت

پاسخ لمبرت	پاسخ	پارامتر
—	۳/۴۶۶۳	ضربه کل، Δv_i
۸/۵۷۸۲	۸/۵۷۸۲	آرگومان نقطه حضیض مدار انتقالی، ω
۳۵/۶۴۱۷	۳۵/۶۴۱۷	زاویه میل مدار انتقالی، i
۵۹/۰۷۷۶	۵۹/۰۷۷۶	مدار انتقالی Ω
—	۸۱/۶۲۴۷	زاویه مرکزی انتقالی، Δ
—	۲۱/۵۶۸۷	تغییر صفحه در ۱، γ_1
—	۰/۸۳۴۴	تغییر صفحه در ۲، γ_2
۰/۵۰۹۶۲	۰/۵۰۹۶۲	خروج از مرکز مدار انتقالی، e

ب) انتقال نامقید زمانی

در ادامه به حل مثال مطرح شده در حالت انتقال بهینه نامقید زمانی، پرداخته می‌شود. هدف، انتقال از مدار اولیه به مدار نهایی است بطوریکه کم‌ترین انرژی لازم برای انتقال بین این دو مدار مصرف شود. یکی از راه‌های رسیدن به پاسخ کلی مسئله، استفاده از روشی است که در ادامه به آن اشاره می‌شود.



شکل (۱۰): هندسه مدار انتقالی به همراه عوامل مدار انتقالی و زمان انتقال برای یک انتقال بهینه مقید زمانی

جدول (۶): عوامل مدار انتقالی برای انتقال نامقید زمانی

عوامل	مقدار
ضربه‌ی اول، Δv_1	$0.97737 (km/s)$
ضربه‌ی دوم، Δv_2	$1.0544 (km/s)$
ضربه‌ی کل Δv_T	$2.0317 (km/s)$
آرگومان نقطه حضیض مدار انتقالی، ω	$46/9068$
زاویه میل صفحه مداری مدار انتقالی، i	$30/7961$
مدار انتقالی Ω	$24/5969$
زاویه مرکزی روی مدار انتقالی، Δ	$201/4409$
زاویه تغییر صفحه در ضربه اول، γ_1	$2/4241$
زاویه تغییر صفحه در ضربه دوم، γ_2	$-19/4315$
خروج از مرکز مدار انتقالی، e	$0/44703$
نیم‌شکم مدار انتقالی، p	$9871/751 (km)$

در ادامه برای اطمینان از روش حل ارائه شده، مثال مرجع [۸] حل می‌شود. در این مثال، مدارهای اولیه و هدف، بیضی‌های غیر هم‌شکل و (با خروج از مرکزهای متفاوت) هم‌صفحه ولی غیر هم‌محور هستند که بعلاوه غیر هم‌محور بودن مدارها، نمی‌توان از روش هومن و یا روش‌های مشابه آن استفاده نمود. عوامل مدار اولیه و هدف به‌صورت جدول (۷) می‌باشند.

در مرجع [۸] این مثال با یک روش پیچیده عددی حل شده و فقط دو پاسخ برای آن به شرح جدول (۸) بدست آمده است. با توجه به اینکه یکی از پاسخ‌ها نسبت به دیگری مقدار کمتری دارد، نویسنده مرجع [۸] احتمال داده‌است که پاسخ بهینه‌ی این مثال همان پاسخ اول است. در اینجا با استفاده از روابط مطرح شده و همچنین روشی ارائه شده، پاسخ کلی مسئله بدست آمده است. پاسخ حاصل از حل معادلات مطرح شده به‌صورت خلاصه در جدول (۹) آمده است.

جدول (۷): عوامل مدارهای اولیه و هدف

	i	Ω	ω	$P(km)$	e
مدار اولیه	۰	۰	۰	۳۳۳.۳۳	۰/۳۳
مدار هدف	۰	۰	۳۰	۵۰,۰۰۰	۰/۵

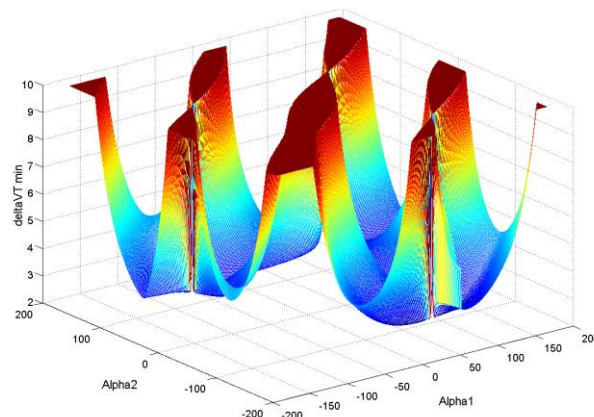
جدول (۸): دو پاسخ ارائه شده در مرجع [۸]

	$\Delta V_T (km/s)$	$p(km)$	α_2	α_1
پاسخ اول	۰/۶۲۰۰	۴۱۸۵۳/۴۳۷	۱۵۵/۰۸۵	۶۱/۲۴۵
پاسخ دوم	۰/۶۶۸۵	۳۹۷۸۷/۳۷۶	۴۶/۸۸۳	۱۶۴/۹۸۹

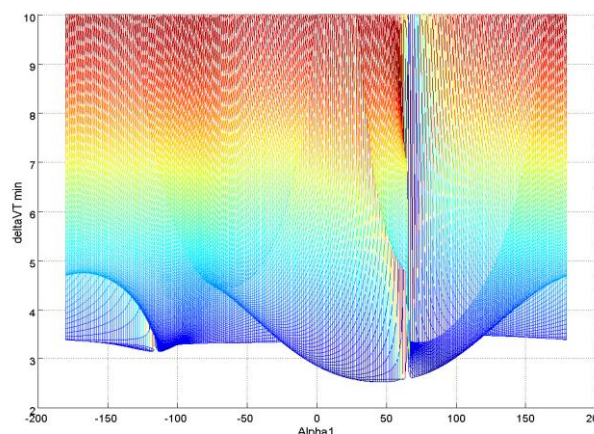
جدول (۹): مقایسه عوامل مدار انتقالی مثال حل شده در مرجع [۸]

و روش پیشنهادی

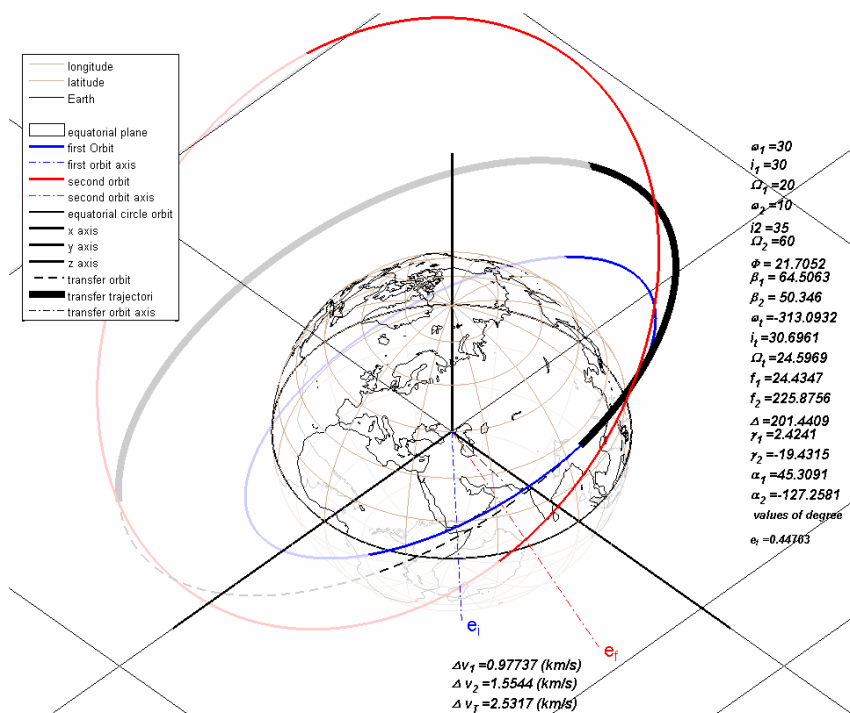
عوامل	پاسخ	مرجع [۸]
ضربه کل، $\Delta v_t \left(\frac{km}{s}\right)$	۰/۶۲۰۰	۰/۶۲۰۰
آرگومان نقطه حضیض مدار انتقالی، ω	۲۴/۰۴۸	۲۴/۰۴۸
α_1	۶۱/۲۴۵	۶۱/۲۴۵
α_2	۱۵۵/۰۸۵	۱۵۵/۰۸۵
زاویه مرکزی انتقال، Δ	۱۲۳/۸۴	—
زمان انتقال (S)	۵۰۲۲۱/۱۴۷۸	—
خروج از مرکز مدار انتقالی، e	۰/۵۷۳۶۵	۰/۵۷۳۶۴۷



شکل (۱۱): پاسخ‌های بهینه محلی و کلی مانور مداری ضربه‌ای

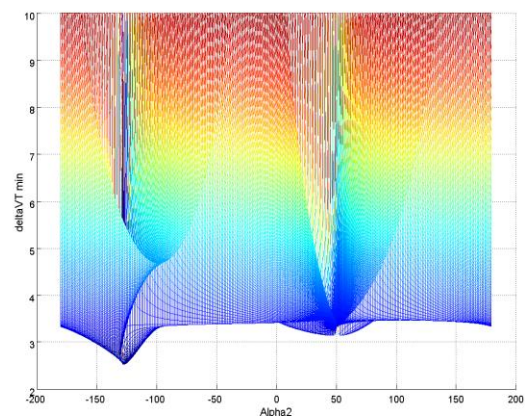


شکل (۱۲): تغییرات تابع Δv_T بهینه برحسب α_1

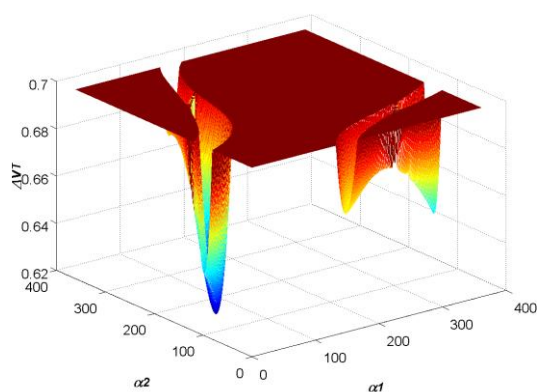


شکل (۱۳): هندسه مدارهای اولیه، هدف، انتقالی بهینه و عوامل انتقال برای یک انتقال بهینه نامقید زمانی

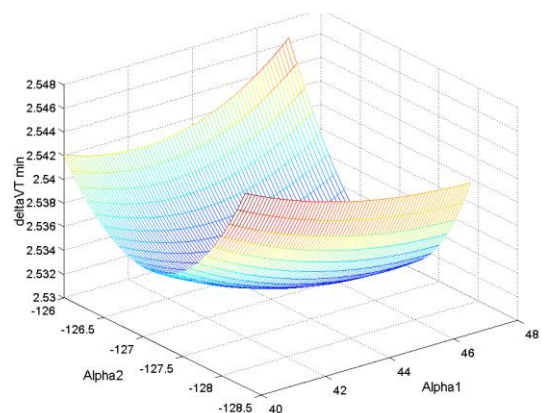
تغییرات تابع Δv_T برحسب تغییرات متغیرهای مستقل در شکل‌های (۱۶) تا (۱۹) آمده‌است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، با اطمینان می‌توان در مورد کلی بودن پاسخ بدست آمده اظهار نظر نمود. همچنین، کانتورهای تابع Δv_T بر حسب متغیرهای مستقل α_1 و α_2 در شکل (۲۰) ترسیم گردیده‌است که بوضوح مقادیر مناسب این متغیرها که مقدار Δv_T کمینه‌را ارائه می‌دهند، آشکار می‌سازد. همچنین هندسه مدارهای اولیه، انتقالی و هدف نیز در شکل (۲۱) نشان داده شده‌است.



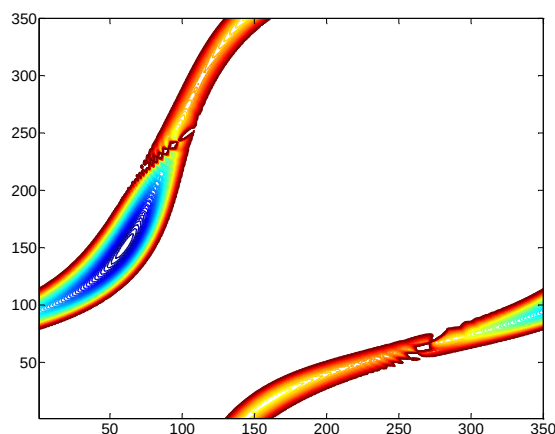
شکل (۱۴): تغییرات تابع Δv_T بهینه برحسب α_2



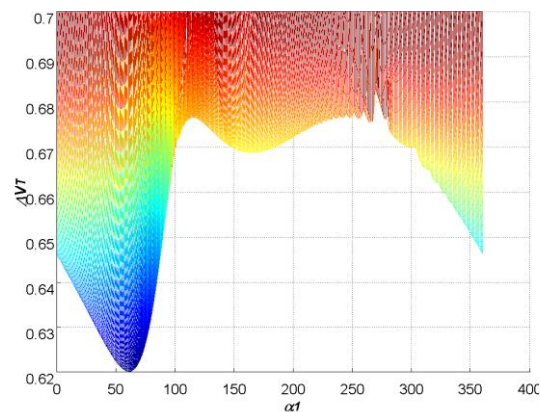
شکل (۱۶): پاسخ‌های بهینه محلی و کلی مانور ضربه‌ای



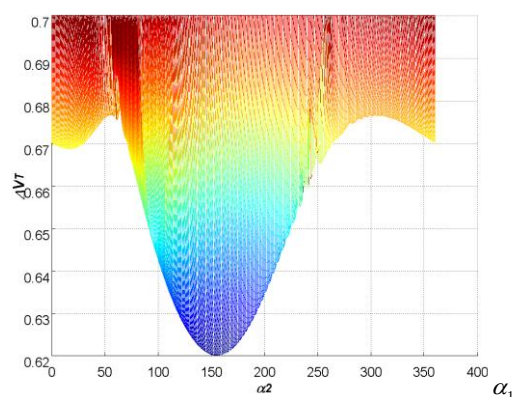
شکل (۱۵): تغییرات تابع Δv_T بهینه برحسب α_1 و α_2 در همسایگی پاسخ بهینه



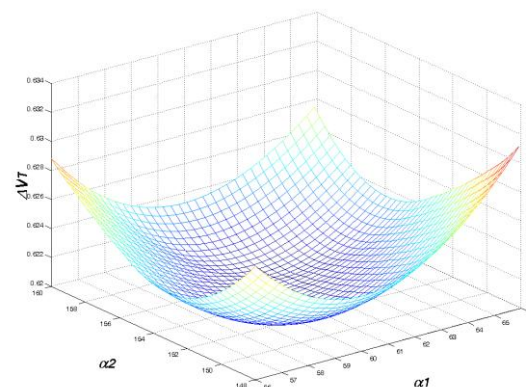
شکل (۲۰): کانتورهای تابع Δv_T بهینه برحسب α_1 و α_2



شکل (۱۷): تغییرات تابع Δv_T برحسب



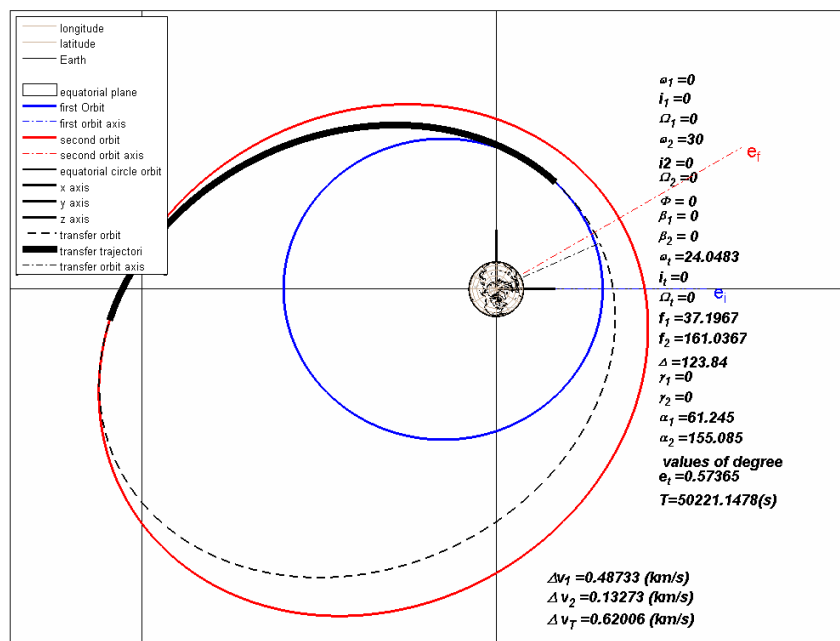
شکل (۱۸): تغییرات تابع Δv_T بهینه برحسب α_2



شکل (۱۹): تغییرات تابع Δv_T در همسایگی پاسخ بهینه کلی

۸- نتیجه گیری

یکی از مراحل ضروری مأموریت‌های فضایی، مانور مداری است. در این مقاله به استخراج معادلات بهینگی مانور ضربه‌ای در فضای سه بعدی با احتساب قید زمان و بدون آن، پرداخته شده است. بررسی هندسه‌ی مدارهای اولیه، هدف و انتقالی نسبت به یکدیگر نیازمند مبحث مثلثات کروی بوده که یکی از بخش‌های مهم و دشوار محاسبات زوایا در حالت‌های مختلف است که تاکنون در هیچ مرجعی به آن پرداخته نشده بود. در این مقاله ۱۶ حالت مختلف قرارگیری مدارهای اولیه و هدف نسبت به یکدیگر و ۴ حالت اصلی قرارگیری مدار انتقالی نسبت به مدارهای اولیه و هدف مورد بررسی قرار گرفت. در پایان به حل یک مثال عددی پرداخته شد و با توجه به تغییرات تابع Δv_T نسبت به متغیرهای مستقل، پاسخ کلی بهینه مسئله استخراج شد و در حالت مقید زمانی درستی نتایج با حل مسئله لمبرت بررسی شد. با توجه به معادلات استخراج شده و روند بیان شده در مقاله، ابزار مناسبی برای حل انواع مسائل پیچیده‌ی مانور بهینه ضربه‌ای و دستیابی به پاسخ‌های کمینه محلی و پاسخ کلی به دست آمد.



شکل (۲۱): هندسه مدارهای اولیه و هدف و انتقالی بهینه و عوامل انتقال برای یک انتقال بهینه نامقید زمانی

۹- مراجع

- | | | | |
|---|------|--|-----|
| Eckel, Karl G. "Optimal Switching Condition for Minimum Fuel Fixed Time Transfer Between Non Coplanar Elliptical Orbits", Acta Astronautica., Vol. 11, 10/11, 1984. | [۷] | Chobotov, Vladimir A. Orbital Mechanics Second Edition. Ohio : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996. | [۸] |
| Lawden, Derek F. "Optimal Transfer Between Coplanar Elliptical Orbits" Journal of Guidance, 1991, Vol. 15, No. 3. | [۸] | Michael D. Griffin, James R. French. Space Vehicle Design, Reston, Virginia : American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc, 2002. | [۲] |
| Keith, Thomas. "An Introduction To the Theory and Practice of Plain and Spherical Trigonometry", London, 2010. | [۹] | Curtis, H. Orbital Mechanics for Engineering Students Elsevier Aerospace Engineering Series, 2005. | [۳] |
| Rothrock, David Andrew. Element of plane and Spherical Trigonometry, Macmillan, 2009. | [۱۰] | F. W. Gobetz and J. R. Doll. "A survey of Impulsive Trajectories", AIAA Journal. 1969, Vol. 7, 5. | [۴] |
| Wertz, James R. Mission Geometry: Orbit and Constellation design and management: spacecraft orbit and attitude systems, 2001. | [۱۱] | Larson, J. and Wertz, J. R. Space Mission Analysis and Design, 3rd edition, Wiley and Sons Ltd., 1999. | [۵] |
| | | Hohmann, Walter. "Die Erreichbarkeit der Himmelshkörper", Oldenburg , 1925. | [۶] |

۱۰- زیر نویس ها

- \ Thruster
- √ Periapsis
- √ Aopapsis
- ⋈ True anomaly
- ° Eccentricity
- \ Semi latus rectum
- √ Mean Anomaly
- ^ Eccentric Anomaly
- ^ Ascending