نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۴۹، شماره ۱، سال ۱۳۹۶، صفحات ۱۰۱ تا ۱۱۲
DOI: 10.22060/mej.2016.720

توسعۀ الگوی رتبه‌کاسته برای بازسازی داده‌های مفقودشدۀ میدان‌های جریان ناپایا با استفاده از یک روند تجزیۀ زمانی

محمد کاظم مؤیدی*

آزمایشگاه پژوهشی دینامیک سیالات محاسباتی،گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه قم، قم، ایران

چکیده: در این پژوهش از روش تجزیه متعامد بهینه جهت بازسازی میدان جریان تراکم‌ناپذیر ناپایای لزج حول سیلندر با داده‌های مفقودشده یا تُنُک و محاسبۀ نیروهای وارد بر آن استفاده شده‌است. الگوی موردنظر ترکیبی از روش تجزیه متعامد بهینه همراه با حل یک مسالۀ بهینه‌سازی به‌منظور دستیابی به مدلی رتبه‌کاسته است که می‌تواند با دقّت مناسب و سرعت بالا، نقاط مفقودشده یا پایه‌های ناقص را بازسازی نماید. دو نوع کاربرد برای این روش در نظر گرفته شده، در نوع اول روش برای بازسازی یک پایه از دسته نمایۀ مورد نظر با بهره‌گیری از یک روش تکراری به‌کار گرفته شده‌است. نوع دوم، روشی است بر مبنای نوع اول و در این مقاله پیشنهاد شده‌است. در این روش با استفاده از تجزیه میدان جریان در راستای زمان و با بهره‌گیری از یک فرآیند پیشروی زمانی پایه‌های ناقص دسته نمایۀ مورد نظر بازسازی می‌شوند. ویژگی این روش بهره‌گیری از بهینه‌سازی و بازسازی گام‌به‌گام دسته نمایۀ اصلی به‌منظور کاهش تعداد مجهولات و دستیابی به الگویی با دقت بالاتر در بازیابی داده‌های مفقودشده می‌باشد. نتایج حاصل از هر دو مدل با داده‌های حاصل از شبیه‌سازی‌های عددی مستقیم مقایسه شده که دقّت بالا و توانایی‌های مناسب هر دو روش را نشان می‌دهد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۲۴ خرداد ۱۳۹۴
بازنگری: ۲۱ شهریور ۱۳۹۴
پذیرش: ۱۲ دی ۱۳۹۴
ارائه آنلاین: ۱۸ آبان ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:
داده‌های مفقودشده
روش تجزیه متعامد بهینه
مدل رتبه‌کاسته
جریان ناپایا

۱- مقدمه

به‌طور کلی الگوهای تحلیل مسائل مکانیک سیالات شامل روش‌های آزمایشگاهی و محاسباتی بوده و ویژگی‌های هر کدام در مراجع مختلفی آورده شده‌است [۱]. محدودیت‌های ابزارهای اندازه‌گیری در داده‌برداری نقاط مختلف میدان جریان و وابستگی الگوهای عددی به سخت‌افزارهای کامپیوتری به‌منظور افزایش تعداد گره‌های محاسباتی، از مهمترین و قابل تأمل‌ترین ویژگی‌های آنها می‌باشد [۲]. توسعۀ روش‌هایی که بتوانند اطلاعات نقاط بیشتری از میدان جریان را چه از دیدگاه عدم دقت مناسب در داده‌برداری، عدم وجود داده‌های موردنظر (مربوط به روش‌های آزمایشگاهی) و کاهش تعداد محاسبات به‌منظور کاهش هزینه و زمان (مربوط به روش‌های محاسباتی) تخمین زده و محاسبه کنند، می‌تواند به‌عنوان یک راهکار مناسب مدنظر قرار گیرد. در این خصوص الگوهای متفاوتی مطرح بوده که از آن جمله می‌توان از الگوهای سادۀ میان‌یابی خطی و غیرخطی یک‌بعدی، الگوهای میان‌یابی چندبعدی(مکانی)، روش‌های میان‌یابی وزنی مانند روش کریجینگ [۳] که بر مبنای یک عامل متحرک وزن‌دار مقادیر موردنظر در نقاط مختلف میدان را میان‌یابی می‌کند، نام برد. در این میان استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه که توانایی استخراج ساختارهای پرانرژی میدان را داشته و در نتیجه می‌تواند حجم محاسبات را با حفظ کیفیت و دقت آن کاهش دهد، می‌تواند به‌عنوان یک الگوی کاراً بسیار مناسب باشد. روش تجزیه متعامد بهینه کاربردهای گسترده‌ای شامل توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته، پردازش تصاویر و بازسازی داده‌ها و ساختارها دارد. این روش با محاسبۀ یک مجموعه از بردارهای پایه که می‌تواند ساختارهای پرانرژی سیستم را تسخیر کنند، آغاز شده و در صورت انتقال معادلات حاکم به فضای برداری تشکیل‌شده از این بردارهای پایه، می‌توان دینامیک حاکم بر میدان را با تعداد ابعاد کمتری و با دقتی مناسب بازسازی نمود.

تاریخچه‌ای بر روش تجزیه متعامد بهینه و تشریح روش‌های انجام آن را می‌توان به‌طور کامل در مقالۀ تفصیلی اسمیت پیدا کرد [۴]. این روش ابتدا توسط کارهونن- لوو به‌عنوان روشی جهت تحلیل داده‌های آماری مطرح شد [۴]. لاملی پیشنهاد کرد که از روش تجزیه متعامد بهینه می‌توان برای استخراج ساختارهای بزرگ مقیاس[1] ظاهرشده در جریان‌های آشفته استفاده کرد [۵]. پس از آن با توجه به محدودیت‌های کامپیوترها و روش‌های محاسباتی این روش برای مدت‌ها بدون کاربرد باقی ماند. لیکن در اواخر دهه هشتاد میلادی به‌تدریج کاربردهای روش تجزیه متعامد بهینه افزونی یافت. به‌ویژه با مطرح شدن روش نمایه توسط سیُرویش، این روش به‌عنوان ابزاری کارآمد برای ایجاد مدل‌های رتبه‌کاسته از سامانه‌های دینامیکی پیچیده‌ای که داده‌هایی از تجربه و یا حل‌های عددی مستقیم دارند، مورد توجه قرار گرفت [۶]. از آن جمله می‌توان به پژوهش طیبی و همکاران اشاره کرد که از این روش به‌منظور تحلیل میدان جریان تراکم‌پذیر و محاسبۀ ضرایب آیرودینامیکی استفاده کردند [۷]. استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه به‌منظور بازسازی ساختارهای ازدست‌رفته یا نمایه‌های مفقودشده با

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: mk.moayyedi@qom.ac.ir

1 Large scale

بهره‌گیری از مودهای پرانرژی میدان در پژوهش دیگری توسط بویی‌تا انجام شد [۸]. ویلککس از این روش به‌منظور یافتن موقعیت سنسورهایی به‌منظور کنترل جریان سیال در پایین دست یک سیلندر (ناحیه دنباله) بهره برد [۹]. ثابت‌قدم و همکاران از روش تجزیه متعامد بهینه به‌منظور بازسازی نمایه‌های ازدست‌رفته و نقاط مفقودشدهٔ میدان جریان ناپایا حول سیلندر مربعی شکل استفاده کردند [۱۰].

با توجه به توانایی روش تجزیه متعامد بهینه در استخراج مودهای پرانرژی، استفاده از آن در پدیده‌هایی شامل اثرات متقابل سازه و سیال و همچنین مسائل کنترل جریان بسیار مورد توجه می‌باشد. در این پژوهش، هدف استفاده از این روش جهت بازسازی داده‌های مفقودشدهٔ میدان‌های جریان ناپایا می‌باشد. در این مورد با تکیه بر روش تجزیه متعامد بهینه– نمایه[1]، از یک روش کمینه‌سازی برای محاسبهٔ ضرایب مجهول نقاط مفقودشده استفاده می‌شود.

۲- روش تجزیه متعامد بهینه – نمایه

لاملی تعریفی از ساختارهای متجانس را به‌صورت توابعی از متغیرهای مکانی ارائه کرد که بیشینه انرژی میدان را دارا هستند. بدین ترتیب این ساختارهای متجانس عبارت زیر را بیشینه می‌کنند:

$$\frac{\left(u(x,t),\varphi(x)\right)^2}{\left(\varphi(x),\varphi(x)\right)} \qquad (۱)$$

عبارت $(f\ ,\ g)$، نمایشگر ضرب داخلی در فضای L^2 که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f,g)=\int_{\Omega} f\, g\, d\Omega$$

همچنین $\langle . \rangle$، متوسط‌گیری دسته‌ای[2] است که با فرض ارگادیک[3] بودن جریان، به‌صورت زیر با متوسط‌گیری زمانی جایگزین می‌شود:

$$\langle . \rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T d\mathrm{T} \qquad (۲)$$

همچنین اگر $\varphi(x)$ رابطهٔ (۱) را بیشینه نماید، می‌توان نتیجه گرفت که اگر میدان جریان در راستای $\varphi(x)$ تصویر شود، انرژی متوسط آن بیش از حالتی است که در راستای هر تابع پایهٔ دیگری تصویر شود. مشابه با روند متعامدسازی گرام– اشمیت، در زیرفضایی که بر $\varphi(x)$ متعامد باشد، این فرآیند بیشینگی (رابطهٔ (۱)) می‌تواند تکرار شود. در نتیجه یک سری توابع متعامد قابل محاسبه بوده که به آنها مودهای تجزیه متعامد بهینه گفته می‌شود. برای محاسبهٔ این توابع ویژه (مودها) می‌توان از یک رابطهٔ جداسازی زمانی استفاده کرد که ارتباطی مستقیم و نزدیک با روش نمایهٔ سیرُویش[4] داشته و به‌عنوان روشی جهت محاسبهٔ مودهای تجزیه متعامد بهینه مطرح می‌باشد. برای استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه– نمایه نیاز به یک دسته nتایی از داده‌های میدان اغتشاشی[5] می‌باشد. این نمایه‌ها می‌توانند از نتایج شبیه‌سازی در زمان‌های متفاوت به‌صورت زیر به‌دست آیند:

$$u_k(x)=u\left(x,t^k\right) \qquad (۳)$$

مودهای تجزیه متعامد بهینه، توابع ویژهٔ ماتریس زیر می‌باشند:

$$K\left(x,x'\right)=u_k\left(x,t\right),u^*\left(x',t^k\right) \qquad (۴)$$

معادلهٔ فوق به معادلهٔ انتگرالی فردهولم نوع دوم تبدیل شده و گسسته‌سازی آن منجر به مسألهٔ مقدار ویژهٔ زیر می‌شود:

$$K\beta=\Lambda\beta \qquad (۵)$$

در این پژوهش از روش تجزیهٔ مقادیر تکین[6] جهت حل مسالهٔ مقدار ویژهٔ فوق استفاده شده‌است. همان‌طور که اشاره شد مودهای تجزیه متعامد بهینه دارای خاصیت تعامد هستند، یعنی در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\left(\varphi^i,\varphi^j\right)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \qquad (۶)$$

زمان‌های t^k (رابطهٔ (۳))، اغلب با بازه‌های هم‌فاصله درنظر گرفته می‌شوند. از دیدگاه ریاضیات تنها شرط لازم برای نمایه‌ها این است که مستقل خطی باشند. حال با داشتن مودها، می‌توان میدان جریان را به‌صورت زیر بازسازی کرد:

$$u\left(\vec{x},t\right)=\sum_{i=1}^{M}a^i\left(t\right)\varphi^i\left(\vec{x}\right) \qquad (۷)$$

۳- بازسازی داده‌های میدان جریان

در این بخش به تشریح چگونگی استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه در بازسازی میدان جریان حول جسم پرداخته خواهد شد. در این خصوص روندهای گوناگونی به‌منظور تشریح و کاربرد فرم‌های مختلف این روش در مراجع آورده شده که در مرجع [۶] به‌تفصیل به آن پرداخته شده‌است. نتایج موجود نیز دقّت و صحت این روش‌ها را اثبات می‌کند. در مرجع [۶] سه روش برای تخمین میدان جریان حول جسم با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه ارائه شده که عبارتند از:

- روش تجزیه متعامد بهینه همراه با میان‌یابی،
- روش Gappy-POD برای بازسازی داده‌های مفقودشده و
- روش تکراری Gappy-POD برای بازسازی نمایه‌های ناقص.

در روش اول پس از محاسبهٔ پایه‌ها و ضرایب مربوط به آنها، با استفاده از یک روش میان‌یابی، ضرایب برای مقادیری از ورودی‌های جریان که اطلاعاتی در خصوص آنها موجود نیست، محاسبه می‌شود. سپس با استفاده

1 POD-Snapshot
2 Ensemble
3 Ergodic
4 Sirovich
5 Perturbation
6 Singular Values Decomposition (SVD)

از رابطهٔ (۷)، میدان جریان با ضرایب محاسبه‌شده و پایه‌های موجود بازسازی می‌شود.

الگوی دوم بر مبنای روش نمایهٔ سیرُویش است که پیش‌تر برای بازسازی تصاویر صورت انسان استفاده شده‌است. در این الگو از روش تجزیه متعامد بهینه به‌منظور بازسازی داده‌های مفقودشدهٔ میدان جریان استفاده می‌شود. با تعریف یک بردار پوشانه[1] به‌منظور جداسازی میدان جریان برای نقاط موجود و مفقودشده، تعریف یک ماتریس جایگزین و با بهره‌گیری از مفهوم ضرب داخلی، یک دستگاه معادلات برای محاسبهٔ ضرایب مودال نقاط مفقودشده حل و سپس میدان جریان بازسازی می‌شود.

در روش سوم فرض بر این است که یک دسته از نمایه‌های ناقص با بردار پوشانه متناسب موجود است. پایه‌ها (مودهای تجزیه متعامد بهینه) با استفاده از یک روش تکراری بازسازی شده و درنهایت با داده‌های موجود، میدان جریان بازسازی خواهد شد.

روش‌هایی که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته، شامل دو نوع می‌باشد. در روش اول از الگوریتم کمترین مربعات به‌منظور حل مسالهٔ کمینه‌سازی با مودهای تجزیه متعامد بهینه استفاده شده و با بهره‌گیری از یک روش تکراری نمایه‌های ناقص بازسازی می‌شوند. روش دوم از لحاظ ساختار اولیه مشابه با روش اول بوده لیکن از یک روند بازسازی پیشرو با زمان و کامل‌تر کردن دسته نمایهٔ اولیه به‌منظور بازسازی پایه‌های ناقص بهره می‌گیرد.

۳- ۱- روش POD -Gappy برای بازسازی داده‌های مفقودشده

روند اصلی یک حل با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه در بخش‌های پیش توضیح داده شد. بدین صورت که تغییرات میدان جریان در قالب یک سری از حل میدان در زمان‌های متفاوت دسته‌بندی می‌شود. این روند همچنین می‌تواند برای پارامترهای جریان که تصاویر لحظه‌ای برحسب آنها ایجاد شده، مورد استفاده قرار گیرد. پارامتر مورد نظر δ فرض می‌شود که می‌تواند گام زمانی، زاویه حمله یا عدد ماخ جریان آزاد باشد. یک راه حل سریع برای بازسازی داده‌های مفقودشدهٔ میدان جریان به ازای هر مقدار δ، بدین صورت است که یک دسته از حل میدان جریان به ازای مقادیر مختلف δ در نظر گرفته می‌شود. حل مسالهٔ مقدار ویژه برای این دسته انجام گرفته تا مقادیر مودهای جریان به‌دست آیند. سپس یک بردار پوشانه تعریف شده، که می‌تواند نقاطی از میدان را مفقود یا نقاطی که از آنها اطلاعاتی موجود نیست، را مشخص کند. این بردار به‌صورت زیر می‌باشد:

$$m_j^k = \begin{cases} 0 & if \quad u_j^k \ \text{is missed or incorrect} \\ 1 & if \quad u_j^k \ \text{is known} \end{cases} \tag{۸}$$

با به‌کارگیری بردار پوشانه و مبتنی بر مفهوم ضرب نقطه‌ای، نقاط مفقودشده مشخص می‌شوند. ضرب نقطه‌ای توسط رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

[1] Mask Vector

$$\left(m^k, u^k\right) = m_j^k u_j^k \tag{۹}$$

ضرب داخلی هم برای بردارهایی با داده‌های ناقص به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$(u,v)_m = \left((m,u),(m,v)\right) \tag{۱۰}$$

بردارهای $\{\varphi^k\}_{k=1}^{n}$ توابع ویژهٔ تجزیه متعامد بهینه بوده که از ماتریس $\{u^k\}_{k=1}^{n}$ به‌دست آمده و تمامی بردارها در آن عناصری معلوم دارند. همچنین g به‌عنوان بردار جواب درنظر گرفته شده که برخی عناصر آن با توجه به مقدار بردار m_i^k مفقود شده‌اند. حال یک بردار $\tilde{g}$ فرض کرده که مقادیر مفقودشدهٔ بردار جواب g را به‌صورت زیر بازیابی می‌کند:

$$\tilde{g} = \sum_{i=1}^{p} b^i \varphi^i \tag{۱۱}$$

در رابطهٔ فوق p تعداد مودهای استفاده‌شده برای مدل رتبه‌کاسته است که در بخش‌های بعدی در خصوص نحوهٔ محاسبهٔ آن توضیح داده خواهدشد. برای محاسبهٔ ضرایب مودال b^i بایستی مقدار خطای بین داده‌های اصلی و بردار اصلاح‌شده کمترین شود. این خطا با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$E = \left\|g - \tilde{g}\right\|^2 \tag{۱۲}$$

مسالهٔ کمینه‌سازی فوق منجر به یک دستگاه معادلات خطی به‌صورت زیر می‌شود:

$$Mb = f \tag{۱۳}$$

به‌طوری‌که:

که با حل آن بردار b^i محاسبه شده و پس از بازسازی بردار $\tilde{g}$، با استفاده از رابطهٔ (۱۱)، مقادیر آن به‌صورت زیر جایگزین می‌شود:

$$g_j = \begin{cases} g_j & if \quad m_j^k = 1 \\ \tilde{g}_j & if \quad m_j^k = 0 \end{cases} \tag{۱۴}$$

۳- ۲- روش تکراری POD-Gappy با پیشروی زمانی

روش تکراری Gappy-POD،که در قسمت قبل توضیح داده‌شد، در شرایطی که تعداد ایستگاه‌ها (نمایه‌های وابسته به زمان) با دادهای مفقودشده زیاد باشد، با مشکلاتی روبرو خواهد شد. روشی که در این پژوهش پیشنهادشده تا حد زیادی می‌تواند این مشکل را برطرف کند. روند کار بدین صورت است که نمایه‌های ناقص موجود در دسته نمایهٔ اصلی با بهره‌گیری از روش ارائه‌شده در بخش پیشین و با یک روند پیشروی زمانی بازسازی می‌شوند. اگر ماتریس نمایه‌ها به‌صورت زیر فرض شود:

$$\mathbf{u} = \{u_1 \quad \ddot{u}_2 \quad \ddot{u}_3 \quad \ldots\ldots \quad u_n\} \tag{۱۵}$$

به‌طوری که آرایه‌های u_1، u_4 و u_n نشان‌دهندهٔ اعضای دسته نمایه با اطلاعات کامل بوده، $\ddot{u}_2$ و $\ddot{u}_3$ به‌ترتیب نمایشگر نمایه‌هایی با درصد اطلاعات مفقودشدهٔ بیشتر و کمتر می‌باشند. سپس ماتریس‌های نمایه به‌صورت محلی

و با چیدمان‌های جدید ایجاد می‌شوند. بدین صورت ماتریس نمایه‌های اصلی شامل بلوک‌های جدید خواهد شد که در آنها تعداد آرایه‌های مفقودشده کمتر خواهد بود. اگر ماتریس نمایه اصلی مطابق رابطهٔ (۱۵) در نظر گرفته‌شود، ماتریس جدید به‌منظور بازسازی گام به گام آرایه‌های از دست‌رفته به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \left\{ \underbrace{\left[u_1 \quad \ddot{u}_3 \quad u_4 \right]}_{New\ local\ Ensemble} \quad \ldots\ldots \right\} \tag{۱۶}$$

سپس نمایهٔ مخدوش‌شده یا مفقودشده توسط فرآیند تشریح‌شده در بخش‌های پیشین بازسازی شده و به‌عنوان یک عضو کامل در هر موقعیت زمانی به دسته نمایهٔ اولیه اضافه می‌شود. بدین ترتیب یک دستهٔ جدید از نمایه‌ها با درصد بالاتری از داده‌ها معلوم را تولید می‌کند:

$$\tilde{\tilde{\mathbf{u}}} = \left\{ u_1 \quad \dddot{u}_2 \quad u_3 \quad u_4 \ldots\ldots \right\} \tag{۱۷}$$

برای بازسازی عضو مفقودشده بعدی ماتریس نمایه جدید به‌صورت زیر ایجاد می‌شود:

$$\mathbf{u} = \left\{ \underbrace{\left[u_1 \quad \ddot{u}_2 \quad u_3 \quad u_4 \right]}_{New\ local\ Ensemble} \quad \ldots\ldots \right\} \tag{۱۸}$$

با این روند دقّت تخمین نمایه‌های بعدی بالاتر رفته و میدان‌هایی با درصد بالاتری از داده‌های نامعلوم با این روند قابل بازسازی می‌باشند. از طرفی در فرآیند حل تکراری به‌دلیل وجود تعداد معلومات بیشتر نیاز به تکرار کمتری می‌باشد. این ویژگی برای بازسازی میدان‌های جریان ناپایا که حجم داده‌های بالایی دارند، بسیار مفید می‌باشد. در شکل ۱، فلوچارت روش تکراری با پیشروی زمانی، نمایش داده شده‌است. همانطور که در این شکل مشخص است، مدل شامل دو فرآیند تکراری و حرکت گام‌به‌گام در زمان است. نکته بارز دیگر در خصوص روش این است که با وجود استفاده از یک الگوی رتبه‌کاسته و سعی بر کاهش درجات آزادی سیستم به‌منظور افزایش سرعت، با حرکت در راستای زمان، فرآیند محاسبات به زمان بیشتری در مقایسه با گام‌های ابتدایی نیاز دارد.

٤- انتخاب تعداد مودها جهت بازسازی میدان با الگوی رتبه‌کاسته

روشن است در یک فرآیند حل مودال با افزایش تعداد مودها، مدل حاصل از دقت بالاتری در مقایسه با حل عددی برخوردار خواهد بود. اگر مودهای سیستم بر اساس اختلاف سطح انرژی چیدمان شوند، این نکته به‌وضوح مشاهده خواهد شد که می‌توان با تعداد کمتری از مودها، سهم بالایی از انرژی موجود در میدان را تسخیر کرد (شکل ۲). این بدین معنی

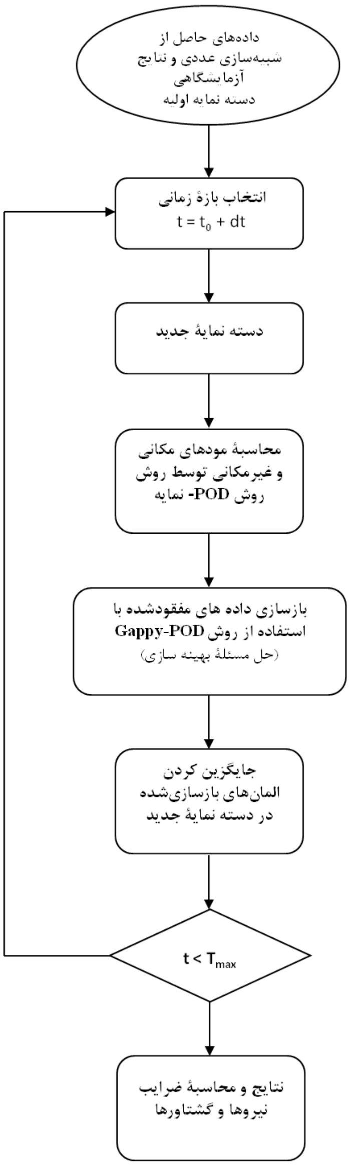


Fig. 1. Flowchart of Iterative Method with Time Advancement Strategy

شکل ۱: فلوچارت روش تکراری با پیشروی زمانی

است که با روش تشریح‌شده می‌توان به یک الگوی رتبه‌کاسته دست یافت. بدین منظور و برای محاسبهٔ تعداد مودهایی که درصد بالاتری از انرژی را دارند، عددی به نام عدد سهم[1] به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\kappa = \frac{\sum_{i=1}^{N_r} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{N_{total}} \lambda_i} \tag{۱۹}$$

در رابطهٔ فوق λ مقادیر ویژه ماتریس داده‌ها می‌باشد. معیاری که در این پژوهش در نظر گرفته شده بدین صورت است که هرگاه مقدار κ برابر با ۹۹/۹٪ شد، مقدار N_r تعداد مودهای مورد نیاز برای ایجاد الگوی رتبه‌کاسته را نشان می‌دهد.

1 Fraction number

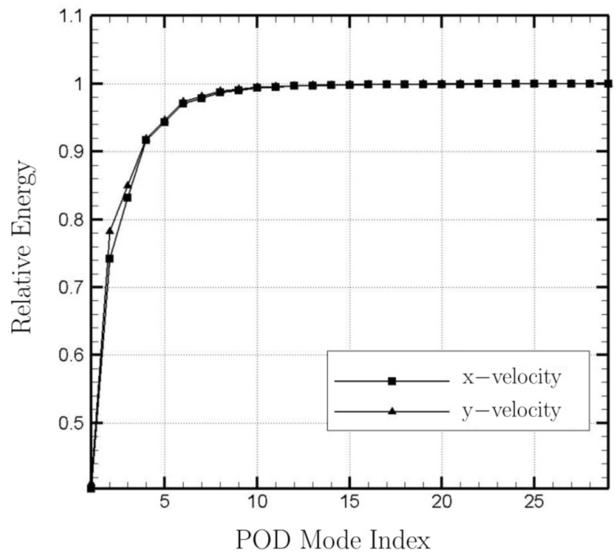


Fig. 2. Relative Energy of Streamwise Velocity Modes Component

شکل ۲: انرژی نسبی مودهای مولفه‌های میدان سرعت

۵- نتایج

در این قسمت به بررسی و ارائه نتایج حاصل پرداخته می‌شود. نتایج برای جریان تراکم‌ناپذیر ناپایای لزج حول سیلندر مربع شکل ارائه خواهد شد. در شبیه‌سازی‌های ارائه‌شده و برای ایجاد دسته نمایه‌ها از یک کد حل جریان ناپایای لزج بر روی یک شبکه باسازمان که بر مبنای روش حجم محدود توسعه یافته، استفاده شده است [۱۰].

مسالهٔ مورد بحث در این پژوهش، جریان ناپایای لزج حول سیلندر مربع شکل در عدد رینولدز ۱۰۰ می‌باشد. یک دسته ۳۸تایی از حل میدان جریان در زمان‌های مختلف به‌عنوان ورودی در نظر گرفته شده‌است. پس از محاسبهٔ مقادیر متوسط پارامترهای موردنظر، این مقادیر از دسته نمایه‌ها کسر شده تا مقادیر اغتشاشی متغیرها محاسبه شوند. حال مودهای تجزیه متعامد بهینه با استفاده از این دسته نمایه‌های اغتشاشی محاسبه می‌شوند. در شکل‌های ۳، ۴ و ۵ به‌ترتیب چهارمود اول مولفهٔ افقی سرعت، مولفهٔ عمودی سرعت و فشار که نسبت به بقیهٔ مودها پرانرژی‌تر هستند، نشان داده شده‌است. ویژگی مودهای تجزیه متعامد بهینه که از فرآیند متعامدسازی تکراری گرام–اشمیت[1] حاصل می‌شوند، این است که این توابع همچون مودهای فوریه بوده یعنی علاوه بر تعامد دارای یک نوع تقارن[2] نیز می‌باشند. همانطور که شکل‌های ۳، ۴ و ۵ دیده می‌شود، یک جفت‌شدگی[3] بین مودها وجود دارد که ناشی از تقارن آنها می‌باشد. با داشتن اطلاعات میدان جریان شامل مودها و ضرایب مودال می‌توان از الگوی تشریح‌شده جهت تحلیل مساله و محاسبهٔ مقادیر موردنظر استفاده کرد. مسالهٔ اول، میدان جریان ناپایا حول سیلندر مربع‌شکل شامل ۵۰ درصد نقاط با داده‌های از دست‌رفته می‌باشد. حال با استفاده از روش ارائه‌شده در بخش ۳–۱ پایه‌های موردنظر بازسازی می‌شوند.

1 Gram-Schmidt Orthogonalization Method
2 Symmetry
3 Duality

شکل ۶ خطوط همتراز مولفهٔ افقی سرعت، مولفهٔ عمودی سرعت و فشار را در زمان $t = ۴/۴۵$ نشان می‌دهد. در این شکل‌ها خطوط همتراز داده‌های اصلی، میدان با ۵۰ درصد داده‌های مخدوش‌شده، داده‌های بازسازی‌شده با روش تکراری استاندارد نشان داده شده‌است. شکل ۷ توزیع سرعت عمودی در راستای خط x ثابت واقع در ناحیهٔ دنباله و در $t = ۴/۴۴۵$ را برای میدانی با ۵۰٪ داده‌های مفقودشده نشان می‌دهد که داده‌های نامعلوم با بهره‌گیری از روش تکراری بازیابی شده‌اند. در شکل ۸ مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از الگوی پیشنهادی در این پژوهش، روش بازسازی تکراری ساده و داده‌های حل عددی مستقیم برای میدان فشار در $t = ۴/۴۵$ را برای میدانی با ۵۰٪ داده‌های مفقودشده نشان می‌دهد که داده‌های نامعلوم با بهره‌گیری از روش تکراری بازیابی شده‌اند. همانطور که در شکل مشخص است در این شرایط روش معمولی توانایی بازسازی داده‌های مفقودشده را داشته و به‌وضوح دقّت داده‌های بازیابی‌شده با این روش آشکار می‌باشد.

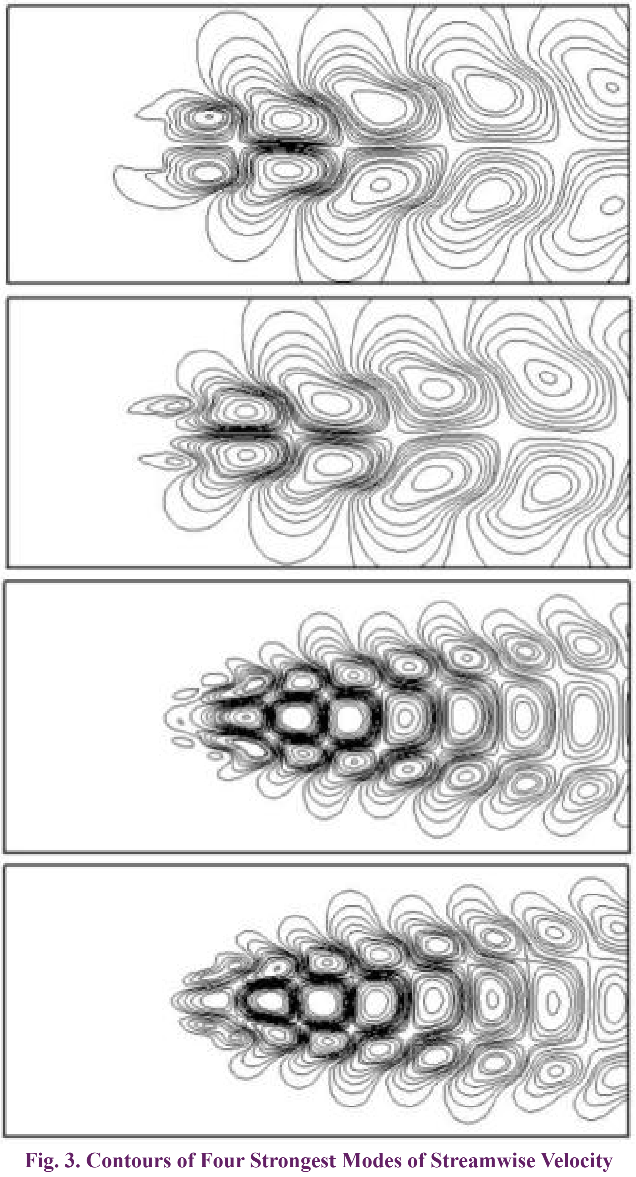


Fig. 3. Contours of Four Strongest Modes of Streamwise Velocity Component

شکل ۳: خطوط همتراز چهار مود پرانرژی‌تر مولفهٔ افقی سرعت

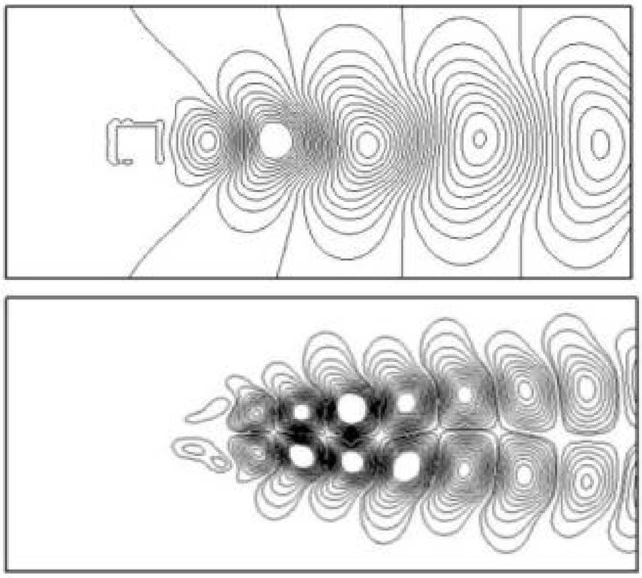


Fig. 4. Contours of Four Strongest Modes of Transverse Velocity Component

شکل ٤: خطوط همتراز چهار مود پرانرژی‌تر مولفهٔ عمودی سرعت

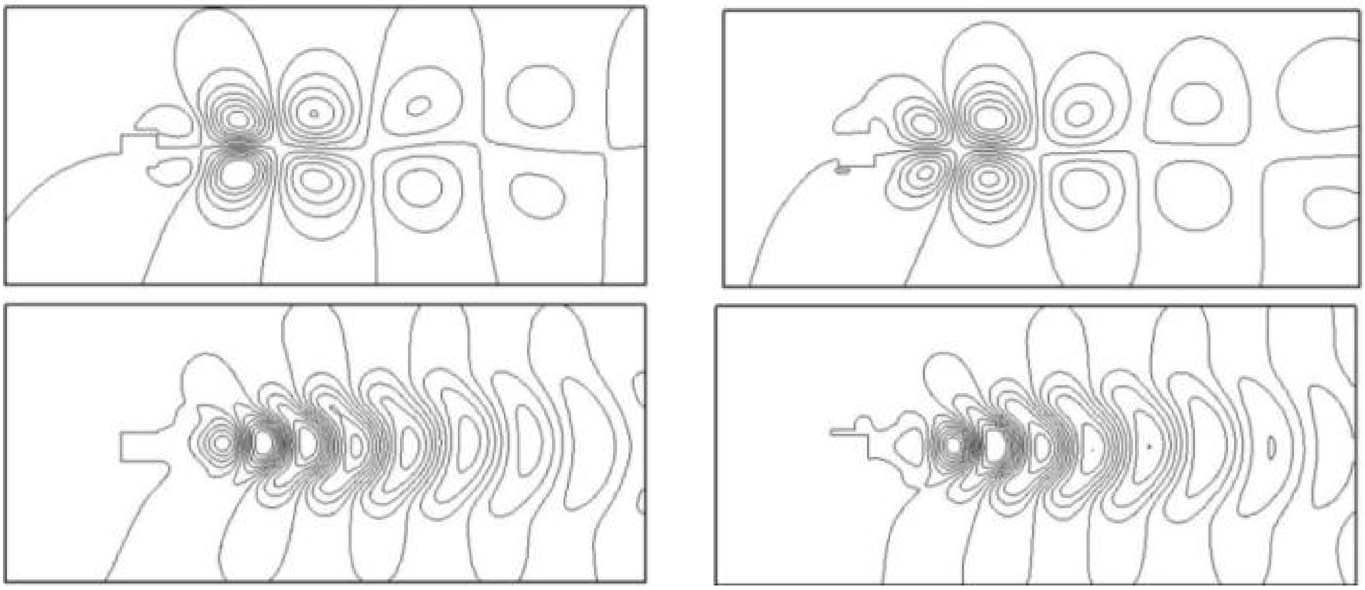


Fig. 5. Contours of Four Strongest Modes of Pressure

شکل ٥: خطوط همتراز چهار مود پرانرژی‌تر فشار

در شکل ۹ خطوط همتراز مولفه افقی سرعت برای داده‌های اصلی (حاصل از حل عددی مستقیم)، میدان با ۹۰٪ داده‌های مفقودشده، داده‌های بازسازی شده با روش تکراری استاندارد و داده‌های بازسازی‌شده با روش تکراری همراه با پیشروی زمانی در زمان t = ۴/۳۸ نمایش داده شده‌است. همانطور که در شکل نیز مشخص است نتایج حاصل از روش پیشنهادشده در این پژوهش از دقت مناسبی در مقایسه با داده‌های میدان اصلی برخوردار می‌باشد در حالی که روش معمولی نتایج دقیقی را ارائه نکرده‌است. خطوط همتراز مولفهٔ عمودی سرعت برای همین گام زمانی در شکل ۱۰ نشان داده شده و مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حل عددی مستقیم، الگوی تکراری ساده و مدل تکراری با تجزیهٔ زمانی در شکل ۱۱ آورده شده‌است. در این دو شکل نیز نتایج حاصل از الگوی پیشنهادی، دقت مناسبی را در بازسازی و بازیابی داده‌های از دست‌رفته نشان می‌دهد.

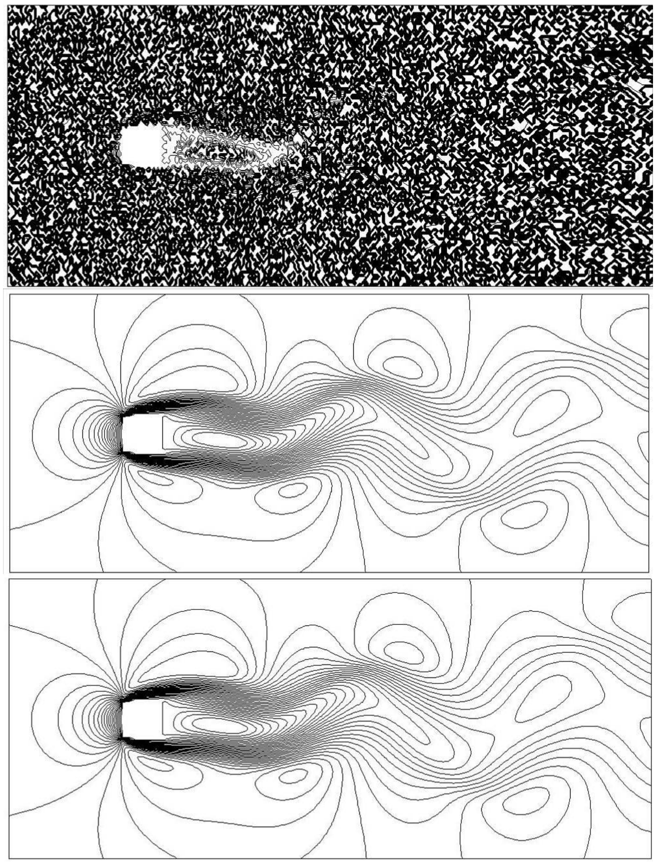
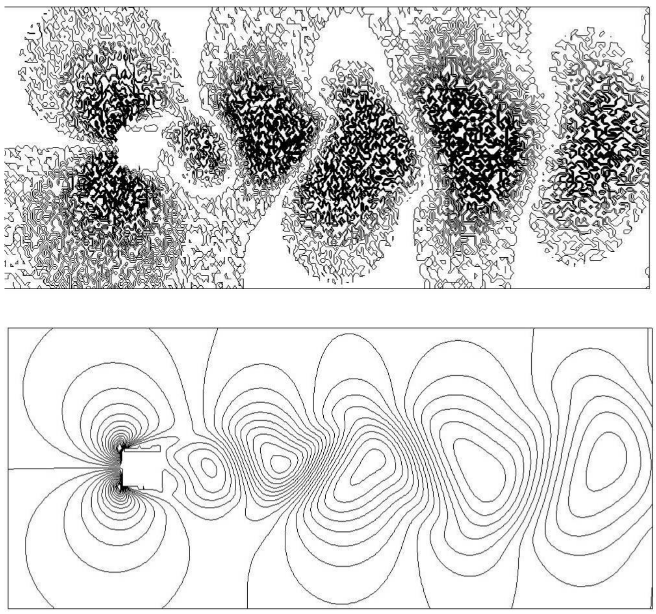


Fig. 6. Streamwise velocity contour for missing data with 50 % (top), original snapshot (middle), and reconstructed using simple iterative method (bottom) at time = 4.45

شکل ٦: خطوط همتراز مولفهٔ افقی سرعت، نمایهٔ ناقص با ٪۵۰ داده‌های مفقودشده (ردیف اول)، نمایهٔ اصلی (ردیف دوم)، و نمایهٔ بازسازی شده توسط روش تکراری ساده (ردیف سوم) در ٤/٤٥= *t*.



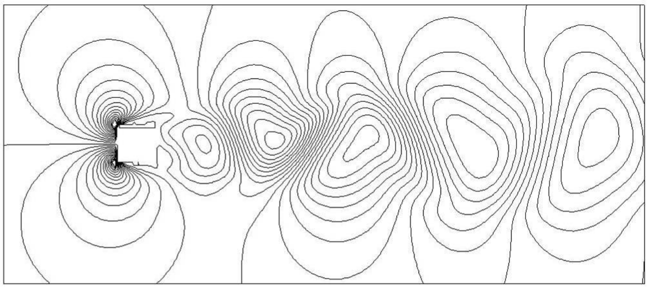


Fig. 7. Transverse velocity contour for missing data with 50 % (top), original snapshot (middle), and reconstructed using simple iterative method (bottom) at time = 4.45

شکل ۷: خطوط همتراز مولفهٔ عمودی سرعت، نمایهٔ ناقص با ٪۵۰ داده‌های مفقودشده (ردیف اول)، نمایهٔ اصلی (ردیف دوم)، و نمایهٔ بازسازی شده توسط روش تکراری ساده (ردیف سوم) در ٤/٤٥= *t*.

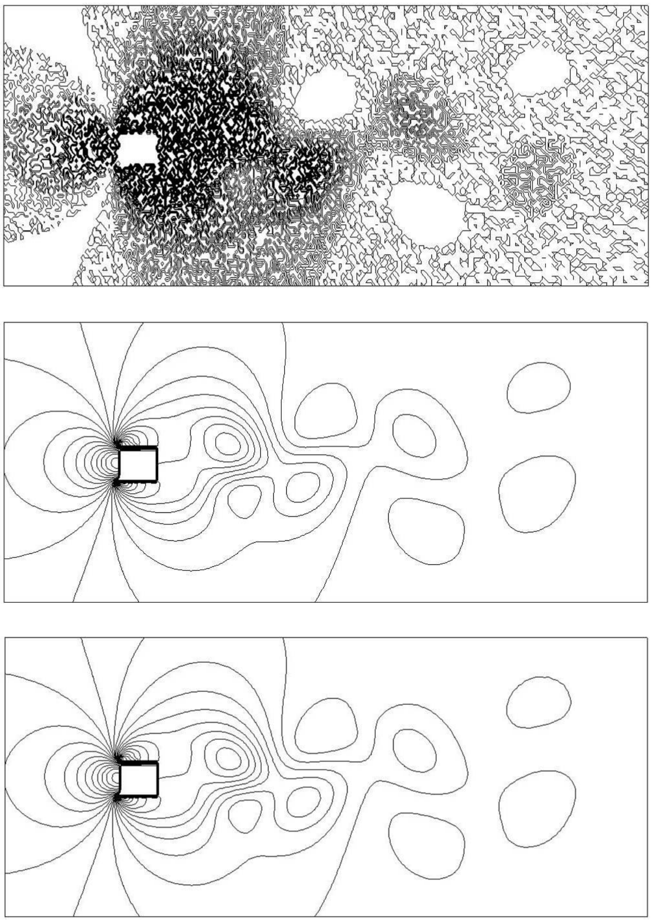


Fig. 8. Pressure contour for missing data with 50 % (top), original snapshot (middle), and reconstructed using simple iterative method (bottom) at time = 4.45

شکل ۸: خطوط همتراز فشار، نمایهٔ ناقص با ٪۵۰ داده‌های مفقودشده (ردیف اول)، نمایهٔ اصلی (ردیف دوم)، و نمایهٔ بازسازی شده توسط روش تکراری ساده (ردیف سوم) در ٤/٤٥= *t*.

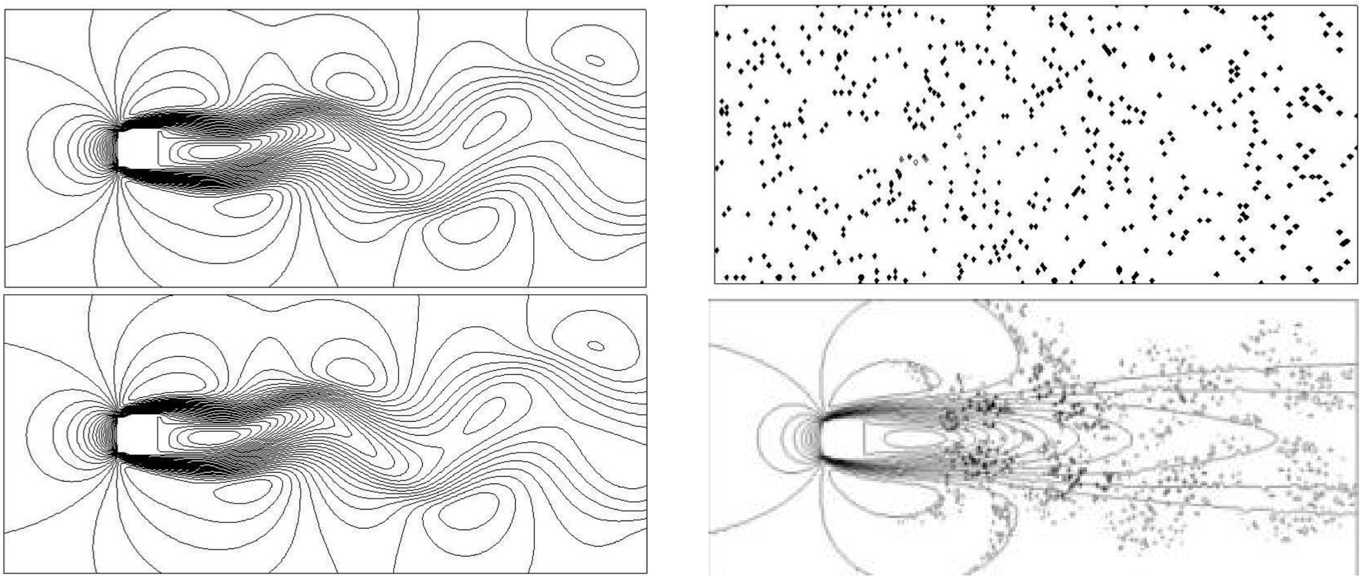


Fig. 9. Streamwise velocity contour for missing data with 90 % (top), original snapshot (second row), and reconstructed using simple iterative method (third row) and reconstructed using time advancing iterative method (bottom) at time = 4.38.

شکل ۹: خطوط همتراز مولفهٔ افقی سرعت، نمایهٔ ناقص با ٪۹۰ داده‌های مفقودشده (ردیف اول)، نمایهٔ اصلی (ردیف دوم)، نمایهٔ بازسازی شده توسط روش تکراری ساده (ردیف سوم) و نمایهٔ بازسازی شده توسط روش تکراری با پیشروی زمانی (ردیف چهارم) در t =۴/۳۸.

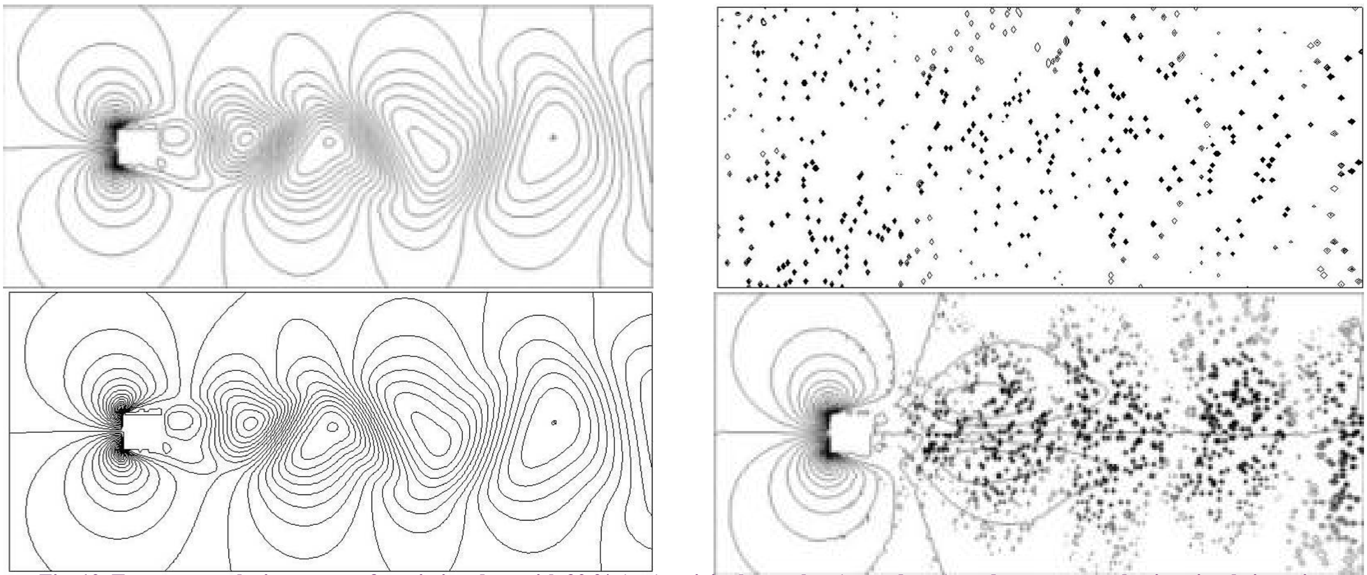
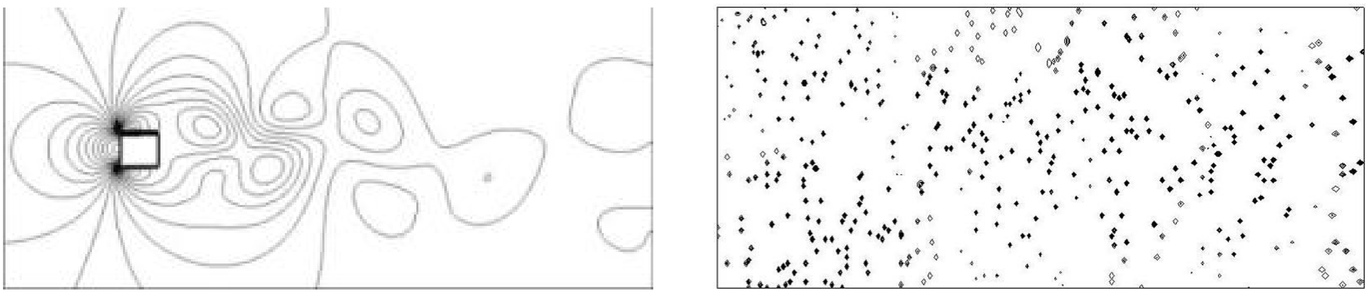


Fig. 10. Transverse velocity contour for missing data with 90 % (top), original snapshot (second row), and reconstructed using simple iterative method (third row) and reconstructed using time advancing iterative method (bottom) at time = 4.38

شکل ۱۰: خطوط همتراز مولفهٔ عمودی سرعت، نمایهٔ ناقص با ٪۹۰ داده‌های مفقودشده (ردیف اول)، نمایهٔ اصلی (ردیف دوم)، نمایهٔ بازسازی شده توسط روش تکراری ساده (ردیف سوم) و نمایهٔ بازسازی شده توسط روش تکراری با پیشروی زمانی (ردیف چهارم) در t =۴/۳۸.



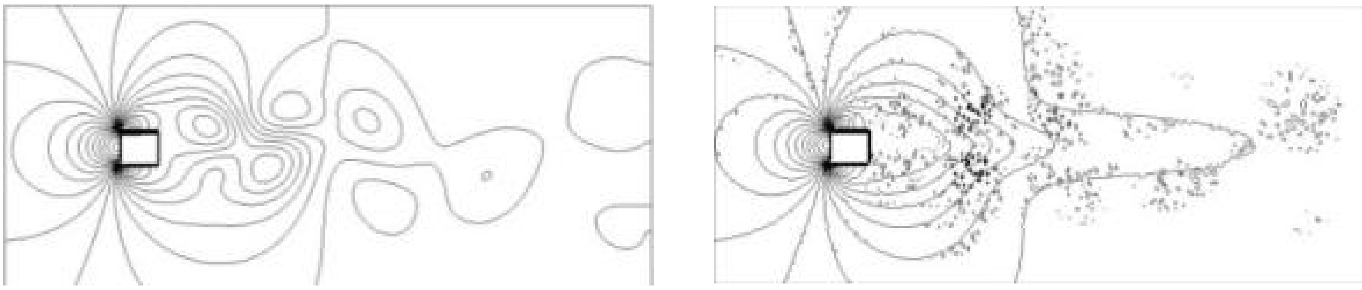
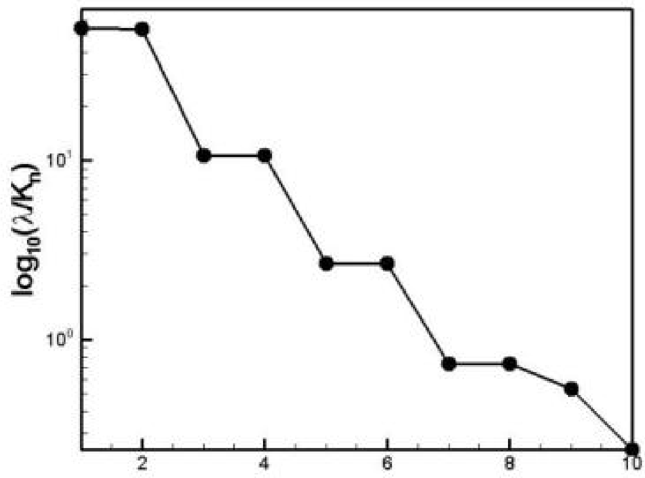


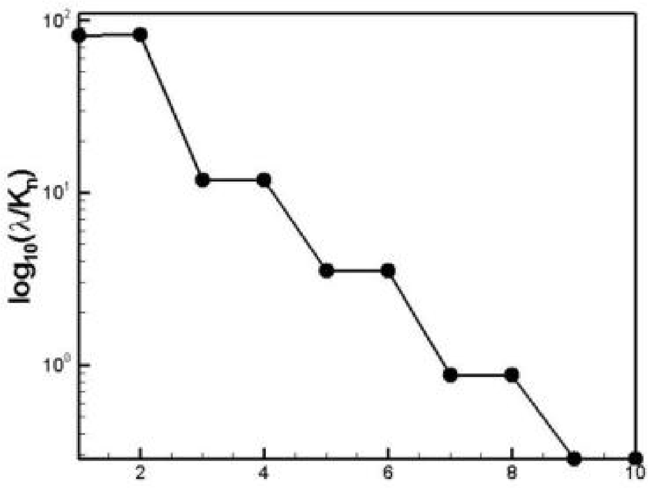
Fig. 11. Pressure contour for missing data with 90 % (top), original snapshot (second row), and reconstructed using simple iterative method (third row) and reconstructed using time advancing iterative method (bottom) at time = 4.38

شکل ۱۱: خطوط همتراز فشار، نمایهٔ ناقص با ۹۰٪ داده‌های مفقودشده (ردیف اول)، نمایهٔ اصلی (ردیف دوم)، نمایهٔ بازسازی شده توسط روش تکراری ساده (ردیف سوم) و نمایهٔ بازسازی شده توسط روش تکراری با پیشروی زمانی (ردیف چهارم) در ۴/۳۸= *t*.

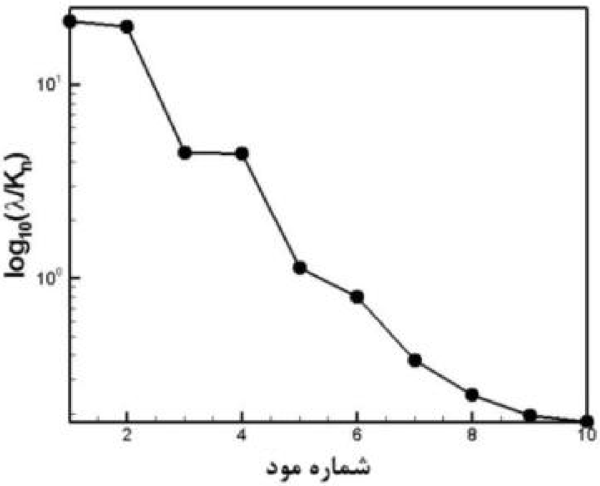
شکل ۱۲ مقایسه‌ای بین مقادیر ویژهٔ حاصل از داده‌های اصلی و مقادیر حاصل از روش تکراری با پیشروی زمانی برای بازسازی نمایه‌های ناقص یک میدان جریان با ۹۰٪ داده‌های مفقودشده را نمایش می‌دهد. همانطور که مشخص است نتایج به‌دست آمده از دقت بالایی حتی در محدودهٔ مودهای دارای میزان انرژی پائین‌تر نیز برخوردار می‌باشد.



(الف)



(ب)



(پ)

Fig. 12. Comparison between eigenvalues of streamwise velocity (top), transverse velocity (middle), and pressure (bottom), Original CFD Ensemble (points) and reconstructed using time advancing iterative method (solid line)

شکل ۱۲: مقایسه بین مقادیر ویژه برای نمایه‌های، مولفهٔ افقی سرعت (الف)، مولفهٔ عمودی سرعت (ب) و فشار (پ)، نقاط، تصویرسازی نمایه‌های اصلی (CFD) و خطوط، بازسازی با روش تکراری با پیشروی زمانی

در شکل ۱۳ توزیع مولفهٔ افقی سرعت در راستای خط x ثابت واقع در ناحیهٔ دنباله و در موقعیت زمانی جدید ۲/۵ = t برای دو حالت میدان با داده‌های مفقودشده و داده‌های بازسازی‌شده دیده می‌شود. مقایسه منحنی تغییرات مولفهٔ عمودی سرعت در راستای عمودی و روی خط x ثابت در ناحیهٔ دنباله به ازای ۲/۵ = t در شکل ۱۴ آورده شده‌است. شکل ۱۵ نیز توزیع فشار در راستای عمود بر جهت جریان ورودی و به ازای مقدار x- ثابت را نمایش می‌دهد. نکته روشن در این نتایج دقّت بالای بازیابی داده‌ها به‌وسیلهٔ روش پیشنهادی بوده که از مقایسه نمودار توزیع متغیرهای میدان شامل داده‌های مفقودشده با میدان بازسازی‌شده و داده‌های اصلی به خوبی آشکار می‌شود. شکل ۱۶ توزیع زمانی ضریب برآ حاصل از حل عددی مستقیم در مقایسه با داده‌های میدان مخدوش‌شده و میدان بازسازی‌شده با بهره‌گیری از روش پیشروی زمانی ارائه شده‌است. واضح است که این روش به‌خوبی داده‌های میدان جریان را بازسازی کرده و دقت داده‌های حاصل در مقایسه با داده‌های اصلی بسیار بالا می‌باشد.

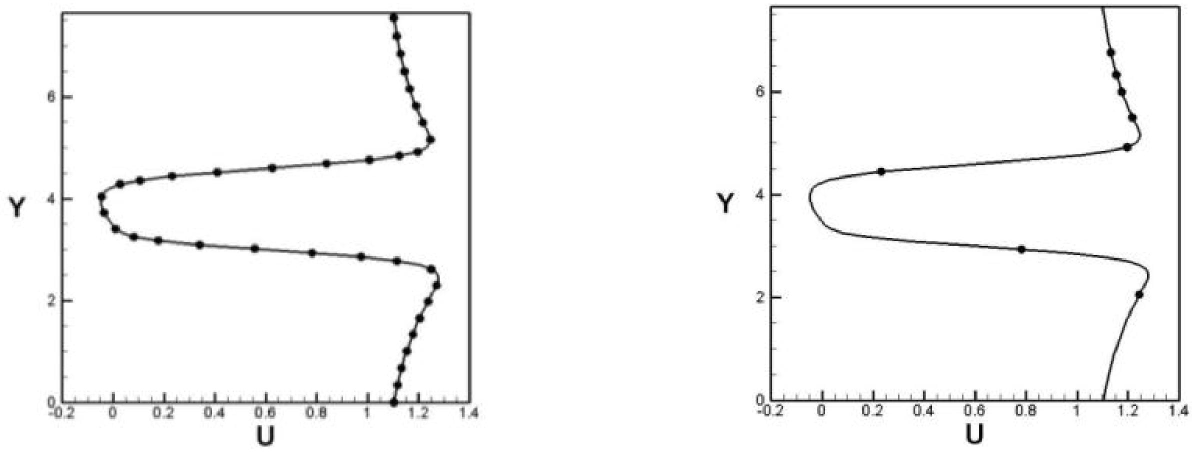


Fig. 13. Comparison of streamwise velocity at constant x-position at the wake region for 90% missed field (top) and reconstructed using time advancing iterative method (bottom) with original data at time = 2.5

شکل ۱۳: مقایسه بین توزیع مولفهٔ سرعت افقی برای میدان با ٪۹۰ داده‌های مفقودشده با میدان اصلی (بالا) و میدان بازسازی‌شده با میدان اصلی (پایین) در راستای خط x- ثابت واقع در ناحیهٔ دنباله در t= ۲/۵.

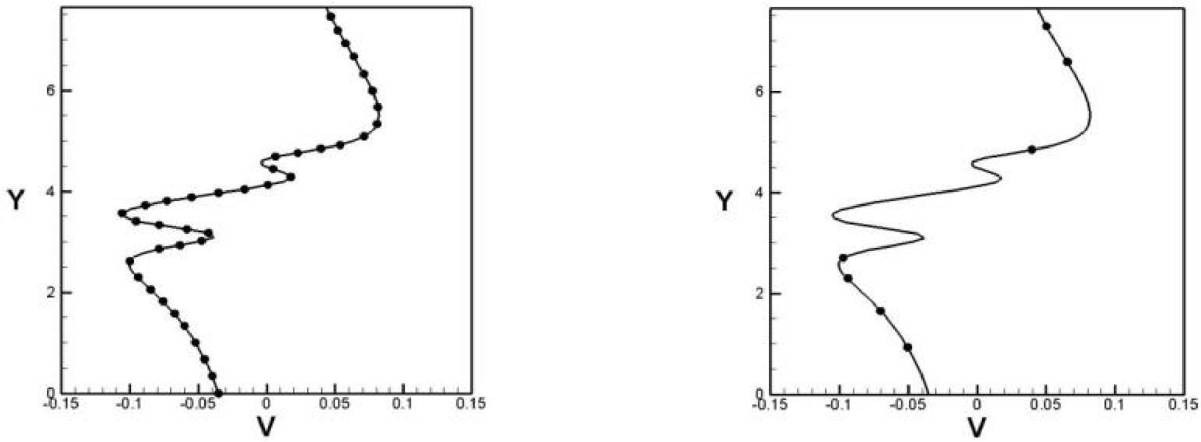


Fig. 14. Comparison of transverse velocity at constant x-position at the wake region for 90% missed field (top) and reconstructed using time advancing iterative method (bottom) with original data at time = 2.5

شکل ۱۴: مقایسه بین توزیع مولفهٔ سرعت عمودی برای میدان با ٪۹۰ داده‌های مفقودشده با میدان اصلی (بالا) و میدان بازسازی‌شده با میدان اصلی (پایین) در راستای خط x- ثابت واقع در ناحیهٔ دنباله در t= ۲/۵.

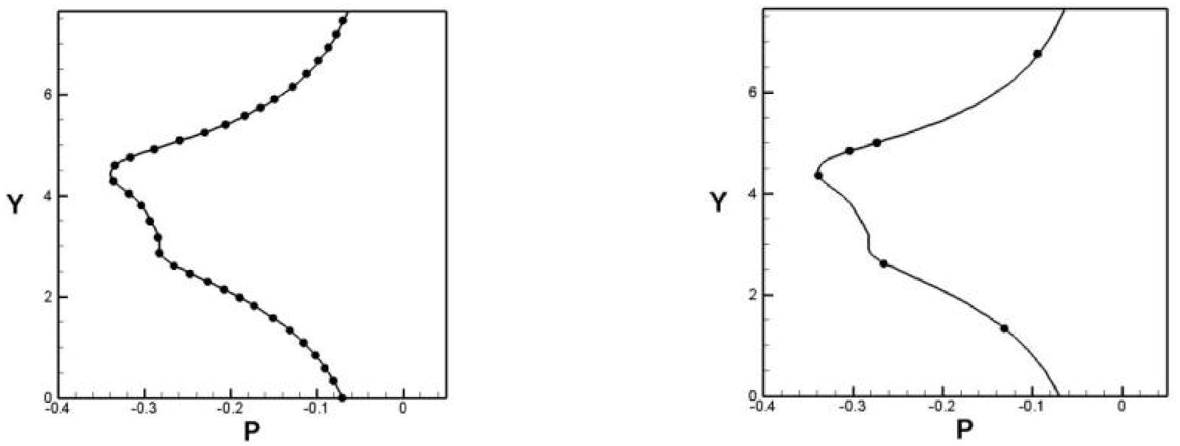


Fig. 15. Comparison of pressure at constant x-position at the wake region for 90% missed field (top) and reconstructed using time advancing iterative method (bottom) with original data at time = 2.5

شکل ۱۵: مقایسه بین توزیع فشار برای میدان با ٪۹۰ داده‌های مفقودشده با میدان اصلی (بالا) و میدان بازسازی‌شده با میدان اصلی (پایین) در راستای خط x- ثابت واقع در ناحیهٔ دنباله در t= ۲/۵.

شکل ۱۷ نیز توزیع زمانی ضریب پسا را برای داده‌های حاصل از حل عددی مستقیم در قیاس با داده‌های میدان مخدوش‌شده و میدان بازسازی‌شده با بهره‌گیری از روش پیشنهادی نمایش می‌دهد. همانطور که در شکل مشخص است مقادیر بازسازی‌شده برای ضریب پسا نیز از دقت مناسبی در مقایسه با داده‌های حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم برخوردار است.

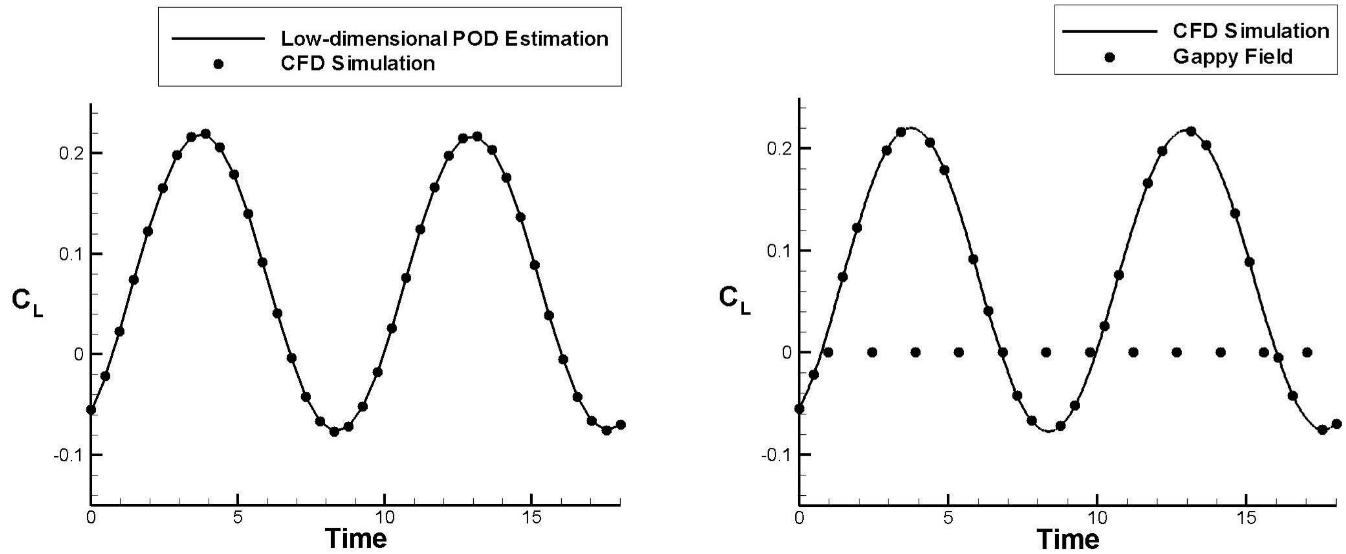


Fig. 16. Comparison of lift coefficient time history for missed data snapshots (top) and repaired data ensemble using time advancing iterative method (bottom)

شکل ١٦: مقایسهٔ تغییرات زمانی ضریب برآ برای دسته نمایه با داده‌های مفقودشده (بالا-چپ) و دسته نمایهٔ کامل‌شده با استفاده از روش تکراری با پیشروی زمانی (بالا-راست).

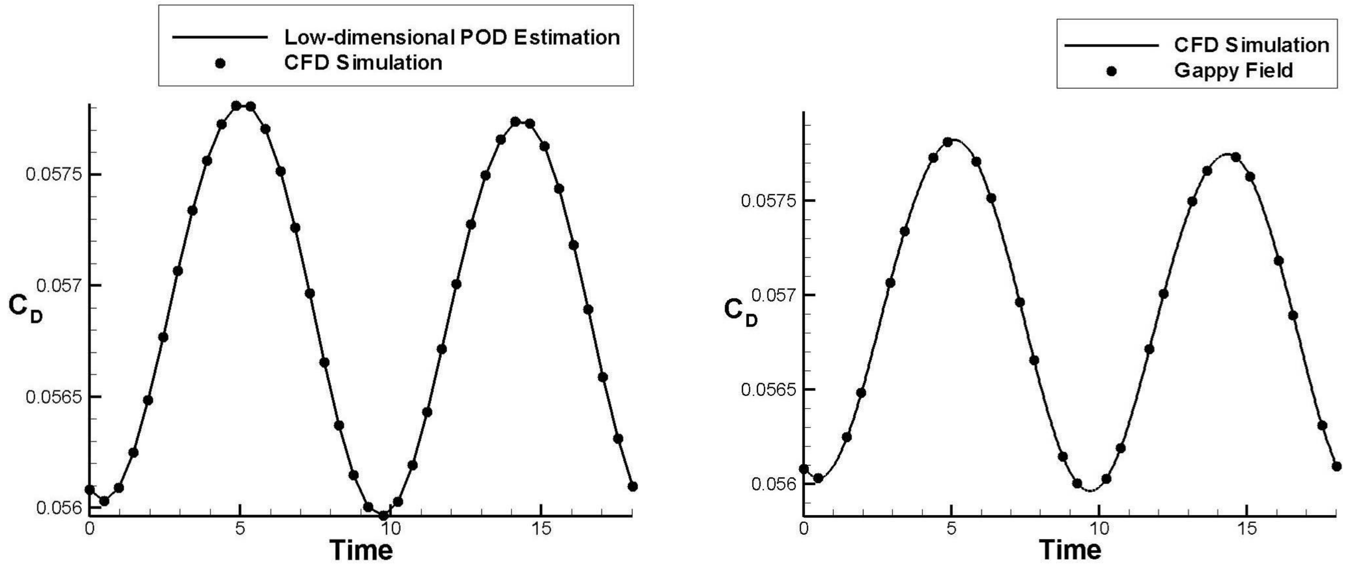


Fig. 17. Comparison of drag coefficient time history for missed data snapshots (top) and repaired data ensemble using time advancing iterative method (bottom)

شکل ۱۷: مقایسهٔ تغییرات زمانی ضریب پسا برای دسته نمایه با داده‌های مفقودشده (بالا-چپ) و دسته نمایهٔ کامل‌شده با استفاده از روش تکراری با پیشروی زمانی (بالا-راست).

٦- نتیجه‌گیری

در این پژوهش پیرامون استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه به‌منظور بازسازی میدان‌های جریان ناپایا با درصد بالای داده‌های مفقودشده بحث شد. مبنای توسعهٔ مدل، شبیه به روش‌های تکراری برای حل معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزیی است. در این الگوها با استفاده از اطلاعات محاسبه‌شده در برخی نقاط (از جمله نقاط نزدیک مرزها)، تعداد معلومات برای محاسبهٔ پارامتر مجهول در نقاط دیگر افزایش یافته، لذا سرعت همگرایی و دقت حل روش افزوده می‌شود (مانند روش گوس- سایدل صریح در حل

معادلات بیضوی). با توجه به نتایج حاصل می‌توان گفت که روش پیشنهاد شده در این پژوهش قابلیت و توانایی مناسبی در بازیابی داده‌های میدان با درصد بالای نقاط نامعلوم را دارد. دلیل این موضوع، تقویت دسته‌نمایهٔ اولیه، شامل داده‌های مفقودشده، در هر گام زمانی و بازسازی داده‌های نامعلوم به‌صورت پیشروی در زمان می‌باشد. بدین معنی که اطلاعات به‌روزشده در فرآیند محاسبهٔ نقاط مجهول در راستاهای مکانی و زمانی استفاده می‌شود. از طرفی به‌دلیل اینکه استفاده از مودهای پرانرژی‌تر برای بازسازی میدان جریان و دستیابی به یک مدل رتبه‌کاسته، روش از سرعت بالای محاسباتی نیز برخوردار می‌باشد. نکته قابل توجه دیگر اینکه این روش قابلیت تعمیم به میدان‌های جریان با تغییرات پارامترهای دیگر (غیر از زمان) را نیز دارد. در انتها می‌توان گفت با توجه به مدل ارائه‌شده، از این روش می‌توان به‌سادگی برای کاربردهای دیگری از جمله بازسازی تصاویر، داده‌های ناقص تست‌های آزمایشگاهی و داده برداری‌های مربوط به هواشناسی و مطالعات اقیانوس‌شناسی نیز استفاده کرد.

فهرست علائم

a	ضرایب مودال
t	زمان
u	بردار سرعت
x	بردار موقعیت

علائم یونانی

β	ماتریس بردارهای ویژه
λ	مقادیر ویژه
φ	مود
κ	عدد سهم
Λ	ماتریس مقادیر ویژه

زیرنویس‌ها

i	شمارندهٔ مود
j	شمارندهٔ نقاط میدان
k	شمارندهٔ نمایه

بالانویس‌ها

i	شمارندهٔ مود
j	شمارندهٔ مود
k	شمارندهٔ نمایه

منابع

[1] White, F., *"Fluid Mechanics"*, 7th Edition, McGraw-Hill Publication, 2010.

[2] Hoffman, K.A. and S. T. Chiang, *"Computational Fluid Dynamics"*, Engineering Education System Publication, 1993.

[3] Gunes a, H. , S. Sirisup, G. E. Karniadakis, "Gappy data: To Krig or not to Krig?", *Journal of Computational Physics*, 212 (2006): 358-382.

[4] Holmes, P., J.L. Lumley and G. Berkooz, *"Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and symmetry"*, Cambridge Monographs on Mechanics, Cambridge University Press, 1996.

[5] Lumley, J.L., *"The Structure of Inhomogeneous Turbulence, Atmospheric Turbulence and Wave Propagation"*, pp. 166-178, 1967.

[6] Sirovich, L., "Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures", Parts I-III, *Quarterly of Applied Math.*, XLV.3 (1987): 561-82.

[7] Taeibi-Rahni, M., F. Sabetghadam and M.K. Moayyedi, "Low-dimensional Proper Orthogonal Decomposition Modeling as a Fast Approach of Aerodynamic Data Estimation", *Journal of Aerospace Engineering*, 23.1 (2010): 44-54.

[8] Bui-Thanh, T., M. Damodaran and K. Wilcox, "Aerodynamic Data Reconstruction and Inverse Design Using Proper Orthogonal Decomposition", *AIAA J.*, 42.8 (2004): 1505-1516.

[9] Wilcox, K., "Unsteady Flow Sensing and Estimation via the Gappy Proper Orthogonal Decomposition", *Computer and Fluids*, 35 (2006): 208-226.

[10] Sabetghadam, F., M. Taeibi-Rahni and M. K. Moayyedi, "Gappy Low-dimensional POD, A Powerful Tool of Data Reconstruction of the Unsteady Flow Fields", *CFD Journal*, 17.3 (2008): 156-164.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. K. Moayyedi, "Reconstruction of Gappy Unsteady Flow Fields Using Improved Reduced Order POD Model Based on Temporal Decomposition Procedure" *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(1) (2017) 101-112.

DOI: 10.22060/mej.2016.720