تحلیل رفتار ترموالاستیک گذرا در استوانهٔ جدارضخیم ساخته شده از مواد هدفمند با ویژگیهای وابسته به دما به شیوه اجزاء محدود

محمد شرعیات[1*]؛ داود عسگری[2]؛ محمد آزادی [3]

چکیده

در مقاله کنونی، تحلیل غیرخطی انتقال حرارت گذرا و تنشهای ترموالاستیک پدید آمده در یک استوانه توخالی ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند، با در نظر گرفتن وابستگی خواص مکانیکی و حرارتی مواد به دما، به شیوه اجزاء محدود انجام پذیرفته است. در اثر دخالت دادن وابستگی ویژگیهای مواد به دما، معادلات اجزاء محدود حاکم بر هر دو تحلیل انتقال حرارت گذرا و تنشهای ترموالاستیک، غیر خطی شده‌اند. در این زمینه، شرایط مرزی دمایی، هندسی و تنشی گوناگونی بررسی شده‌اند. برای دستیابی به پاسخها، از الگوریتم ویژه دربرگیرنده یک روش حل عددی و انجام همزمان انتگرالگیری زمانی و حل تکرار، استفاده شده است. در پایان، نتایج بدست آمده با در نظر گرفتن و بدون در نظر گرفتن اثر وابستگی ویژگیهای مواد به دما، مقایسه شده‌اند. همچنین، اثر شرایط مرزی متفاوت بر توزیع دما، تنشهای شعاعی و تنشهای محیطی بدست آمده، بررسی شده است. نتایج، بیانگر اثر چشمگیر وابستگی ویژگیهای مواد به دما می‌باشند.

کلمات کلیدی : تنشهای ترموالاستیک، انتقال حرارت گذرا، روش اجزاء محدود، مواد هدفمند، وابستگی به دما، تحلیل غیر خطی، استوانه جدار ضخیم

Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of a Thick FGM Cylinder with Temperature-Dependent Material Properties Using the Finite Element Method

M. Shariyat, D.Asgari

ABSTRACT

In the present paper, nonlinear transient heat transfer and thermoelastic analyses of a thick hollow FGM cylinder is accomplished using the finite element method and taking the temperature-dependency of the material properties into consideration. Due to incorporation of the effect of the temperature-dependency of the material properties, the resulted governing FEM equations of both transient heat transfer and thermoelastic stress analyses are nonlinear. In this regard, various thermal, geometrical, and stress boundary conditions are incorporated. An efficient numerical algorithm based on successive updating and time integration is used to derive the results. Finally, results obtained considering the temperature-dependency of the material properties are compared with those derived based on temperature independency assumption. Furthermore, influences of various boundary conditions on the temperature distribution and the radial and circumferential stresses are investigated. Results reveal that the temperature-dependency effect is significant.

KEYWORDS : Thermoelastic stresses, transient heat transfer, finite element method, FGM, temperature-dependency, nonlinear analysis, thick-walled cylinder.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸٦/۱۰/۲٤

تاریخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۸/۵/۱۰

[1*] نویسنده مسئول و دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی خواجه نصیر طوسی، m_shariyat@yahoo.com

[2] کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی خواجه نصیر طوسی، davoodnew2006@yahoo.com

[3] دانشجوی کارشناسی، دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی خواجه نصیر طوسی، m.azadi@yahoo.com.

۱- مقدمه

استفاده از مواد هدفمند، برای تحمل دماها و شوکهای دمایی بالا پیشنهاد می‌گردد. ضریب انتقال حرارت اندک و ضربه‌پذیری اجزاء یاد شده، موجب بالا رفتن مقاومت آنها در برابر دماهای بالا و شوکهای حرارتی قابل توجه، شده است. کاربرد این مواد را می‌توان در مواردی مانند سیستم محرک هواپیما، مخازن رآکتورها، مواد مجاور به مواد پلاسما یا مذاب، ابزارهای براده‌برداری، ورقهای خارجی هواپیما یا فضاپیما، لنتهای ترمز و سایر قطعات مقاوم در برابر شکست ناشی از کمانش، تغییر شکلهای پردامنه و تنشهای بسیار بزرگ حرارتی، یافت.

تحقیقات انجام شده توسط نودا [۱] و تانیگاوا [۲] آشکار می‌سازند که نارساییهای مواد کامپوزیت رشته‌ای مانند تورق، تمرکز تنش در میان لایه‌ها، تنشهای پسماند قابل توجه و جهش در توزیع تنش، به دلیل تغییرات پیوسته نسبت حجمی مخلوط، در مواد هدفمند برطرف شده‌اند.

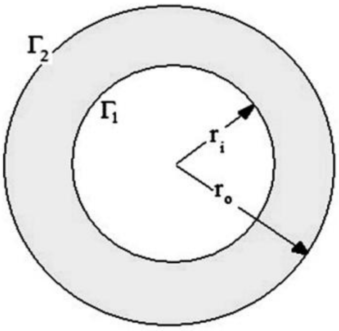
تحلیل تنشهای ترموالاستیک، در استوانه دارای دیواره ضخیم با در نظر گرفتن وابستگی ویژگیهای مواد به دما، تاکنون به گونه‌ای کامل انجام نپذیرفته است. کارهای انجام شده در این زمینه تا کنون، شامل بررسی تنشهای حالت پایدار حرارتی [۳] یا افزایش یکنواخت دما در تمام نقاط، با نادیده گرفتن تغییرات ویژگیهای مواد با دما [۵ و٤] ، تحلیلهای شبه استاتیکی و در نظر گرفتن جزئی وابستگی ویژگیهای مواد به دما [٦] تجزیه استوانه ساخته شده از مواد هدفمند اولیه به زیر استوانه‌های ایزوتروپیک [۷] و تحلیلهای گذرا بدون در نظر گرفتن وابستگی ویژگیهای مکانیکی به دما [۱۲-۸] بوده‌اند.

در مقاله کنونی، تحلیل تنشهای ترموالاستیک استوانه جدار ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند با در نظر گرفتن وابستگی ویژگیهای مواد به دما برای حالتهای گوناگون انتقال حرارت، به شیوه اجزاء محدود انجام شده است. بر خلاف مسائل تحلیل رفتار الاستیک، تغییر شرایط مرزی در مسئله کنونی به تغییر ماتریسهای المان انجامیده و با توجه به اینکه در روابط اجزاء محدود بدست‌آمده، ماتریسهای سختی و میرایی خود نیز به دما وابسته می‌باشند، مسئله کنونی بسیار غیر خطی می‌باشد. از نوآوریهای مقاله کنونی، در نظر گرفتن وابستگی ویژگیهای مواد به دما، اعمال شرایط مرزی تنشی در روابط ترموالاستیک المان بر پایه مولفه‌های جابجایی و ارائه روشی برای به‌هنگام نمودن ماتریسهای غیر خطی انتقال حرارت و ترموالاستیسیته المان در یک الگوریتم دو مرحله‌ای است. در پایان، نتایج بدست آمده با در نظر گرفتن و بدون در نظر گرفتن اثر وابستگی ویژگیهای مواد به دما، مقایسه شده و اثر شرایط مرزی حرارتی و هندسی متفاوت و اثر توان در معادله توانی حاکم بر مخلوط هدفمند بر تنشهای شعاعی و محیطی، بررسی شده است.

۲- معادلات حاکم

۲-۱- روابط حاکم بر رفتار مواد هدفمند

پارامترهای هندسی استوانه مورد بررسی در شکل (۱) نشان داده شده‌اند.



شکل ۱- مشخصات هندسی استوانه مورد بررسی

ماده هدفمند بکار رفته در استوانه توخالی از ترکیب دو ماده ساخته شده است. به گونه‌ای که سطح داخلی، سرامیکی خالص و سطح خارجی، به طور کامل فلزی است. تغییرات هر یک از خواص ماده (P) مانند مدول یانگ در جهت ضخامت، در دمای محیط (T_0) به صورت رابطه (۱) می‌باشند:

$$P_0 = P_{0m} + (P_{0c} - P_{0m})\left(\frac{r_o - r}{r_o - r_i}\right)^N \qquad (۱)$$

P_c خاصیت سرامیک و P_m خاصیت دمای فلز بوده که تغییرات هر یک با دما از رابطه (۲) بدست می آید [۱۳]:

$$P = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3) \qquad (۲)$$

که در آن، P_{-1} تا P_3 ثابتهای مواد می‌باشند. خواص ماده هدفمند در دمای معلوم T با توجه به روابط (۱) و (۲)، بر پایه رابطه (۳) بدست می‌آیند:

$$P = P_{0m}(\beta_{-1}T^{-1} + 1 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \beta_3 T^3)\left[1 - \left(\frac{r_o - r}{r_0 - r_i}\right)^N\right] + P_{0C}(\alpha_{-1}T^{-1} + 1 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \alpha_3 T^3)\left(\frac{r_o - r}{r_0 - r_i}\right)^N \qquad (۳)$$

ضرائب α و β مقادیر P_{-1} تا P_3 به ترتیب، برای فلز و سرامیک برای خواص مختلف می‌باشند.

۲-۲- معادلات انتقال حرارت در استوانه ساخته شده از مواد هدفمند

معادله کلی انتقال حرارت در راستای شعاعی، برای شرایط تقارن محوری، در حالت گذار طبق رابطه (٤) می‌باشد:

$$-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial(\kappa r)}{\partial r}+\kappa r\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right]+\rho\ \ c_v\frac{\partial T}{\partial t}=0 \qquad (٤)$$

در تحلیل کنونی، شرایط مرزی حرارتی عبارتند از:

الف) وجود یک شار حرارتی در داخل استوانه و شرایط همرفت برای سطح خارجی آن:

$$\begin{cases}\kappa\dfrac{\partial T}{\partial r}+h(T-T_\infty)=0 & at\quad r=r_o\\ -\kappa\dfrac{\partial T}{\partial r}=q_0 & at\quad r=r_i\end{cases} \qquad (٥)$$

که در آن، h ضریب انتقال حرارت همرفت و κ ضریب انتقال حرارت به شیوه هدایت در ماده هدفمند، تابعی از مختص شعاعی و دما بوده و بر پایه رابطه (۳) محاسبه می‌گردند. q_0 شار حرارتی وارده بر سطح داخلی می‌باشد.

ب) افزایش ناگهانی دمای سطح داخلی استوانه و شرایط همرفت برای سطح خارجی آن:

$$\begin{cases}\kappa\dfrac{\partial T}{\partial r}+h(T-T_\infty)=0 & at\quad r=r_o\\ T(t>0)=450\,(^\circ K) & at\quad r=r_i\end{cases} \qquad (٦)$$

شرایط اولیه مسئله در هر دو حالت، بصورت رابطه (۷) است:

$$T(t=0)=T_o \qquad (۷)$$

۲-۳- معادلات تنش در استوانه ساخته شده از مواد هدفمند

روابط تنش-کرنش استوانه در حالت کرنش صفحه‌ای ($\varepsilon_{zz}=\varepsilon_0=0$)، به فرم رابطه (۸) می‌باشند:

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_{rr}+\nu\varepsilon_{\theta\theta}-(1+\nu)\alpha(T-T_0)] \qquad (۸)$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta}+\nu\varepsilon_{rr}-(1+\nu)\alpha(T-T_0)]$$

و فرم کلی رابطه تعادل دینامیکی استوانه با چشم‌پوشی از اثر نیروهای حجمی در راستای r، بصورت رابطه (۹) می‌باشد:

$$\frac{d\,\sigma_{rr}}{dr}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=\rho\,\ddot{u} \qquad (۹)$$

با جای‌گذاری روابط میان کرنش و جابجایی:

$$\varepsilon_{rr}=\frac{du}{dr}\qquad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u}{r}\qquad \varepsilon_{r\theta}=0 \qquad (۱۰)$$

در روابط (۸)، رابطه (۱۱) بدست می‌آید:

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\frac{du}{dr}+\nu\frac{u}{r}-\alpha(1+\nu)(T-T_0)] \qquad (۱۱)$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\frac{u}{r}+\nu\frac{du}{dr}-\alpha(1+\nu)(T-T_0)]$$

بنابر این، بر پایه رابطه (۹)، رابطه (۱۲) بدست می‌آید:

$$\frac{d}{dr}\{\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\frac{du}{dr}+\nu\frac{u}{r}-\alpha(1+\nu)(T-T_0)]\} \qquad (۱۲)$$

$$+\frac{1}{r}\{\frac{E}{1+\nu}[\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}]\}=\rho\ddot{u}$$

۳- فرم اجزاء محدود معادلات حاکم

با استفاده از تقریب کانتورویچ، می‌توان نوشت:

$$\{T(r,t)\}=[\aleph(r)]\{T^{(e)}(t)\} \qquad (۱۳)$$

$[\aleph]$ ماتریس توابع شکل می‌باشد که برای المانهای مرتبه دوم با سه نقطه گره استفاده شده در این مقاله، بصورت زیر است:

$$[\aleph]=[\frac{1}{2}\xi(\xi-1)\ \ (1-\xi^2)\ \ \frac{1}{2}\xi(\xi+1)] \qquad (۱٤)$$

ξ مختص طبیعی است [۱٤]. مشتقات مختصات طبیعی و کلی برحسب تعداد المانها $\left(n^{(e)}\right)$، با رابطه (۱۵) مرتبط می‌گردند:

$$[\aleph]_{,r}=[\aleph]_{,\xi}\xi_{,r}=[\aleph]_{,\xi}\frac{\Delta\xi}{\Delta r}=[\aleph]_{,\xi}\frac{2n^{(e)}}{r_o-r_i} \qquad (۱۵)$$

انتگرال مانده‌ها در روش گلرکین، به فرم رابطه (۱٦) است:

$$\int_\Omega[\aleph]^T R d\Omega=0 \qquad (۱٦)$$

$$R=\rho c[\aleph]\{\dot{T}^{(e)}\}-\frac{1}{r}\left[[\aleph]_{,r}\frac{\partial(\kappa r)}{\partial r}+\kappa r[\aleph]_{,rr}\right]\{T^{(e)}\}$$

(e) نشان دهنده شماره المان است. برای کاهش مرتبه مشتق، می‌توان از انتگرال‌گیری جزء به جزء و قضیه گوس-گرین استفاده کرد که نتیجه آن، بصورت رابطه (۱۷) می‌باشد:

$$[C^{(e)}]\{\dot{T}^{(e)}\}+[K^{(e)}]\{T^{(e)}\}=\{q^{(e)}\} \qquad (۱۷)$$

ماتریس $[C^{(e)}]$ برای هر دو شرط مرزی، بصورت رابطه (۱۸) است:

$$[C^{(e)}]=\int_\Omega\rho c[\aleph]^T[\aleph]d\Omega \qquad (۱۸)$$

ماتریس $[K^{(e)}]$ و بردار $\{q^{(e)}\}$ برای دو شرط مرزی حرارتی یاد شده، عبارتند از:

الف) شرط مرزی حرارتی نوع اول:

$$\{q^{(e)}\}=\int_\Gamma[\aleph]^T\kappa\frac{\partial T}{\partial r}n_r d\Gamma=\int_{\Gamma_1}[\aleph]^T q_0 d\Gamma_1+\int_{\Gamma_2}[\aleph]^T hT_\infty d\Gamma_2 \qquad (۱۹)$$

$$[K^{(e)}]=-\int_\Omega[\aleph]^T\frac{1}{r}\frac{\partial(\kappa r)}{\partial r}[\aleph]_{,r}+\int_\Omega\left\{[\aleph]_{,r}^T\kappa+[\aleph]^T\kappa_{,r}\right\}[\aleph]_{,r}\,d\Omega+\int_{\Gamma_2}[\aleph]^T h[\aleph]d\Gamma_2 \qquad (۲۰)$$

(ب) شرط مرزی حرارتی نوع دوم:

$$\{q^{(e)}\}=\int_\Gamma[\aleph]^T\kappa\frac{\partial T}{\partial r}n_r d\Gamma=\int_{\Gamma_2}[\aleph]^T hT_\infty d\Gamma_2 \qquad (۲۱)$$

$$[K^{(e)}]=-\int_{\Omega}[\aleph]^T\frac{1}{r}\frac{\partial(\kappa r)}{\partial r}[\aleph]_{,r}\,d\Omega+\int_{\Omega}\left\{[\aleph]^T_{,r}\,\kappa+[\aleph]^T\kappa_{,r}\right\}[\aleph]_{,r}\,d\Omega+\int_{\Gamma_2}[\aleph]^T h[\aleph]d\Gamma_2-\int_{\Gamma_1}[\aleph]^T\kappa[\aleph]_{,r}\,n_r d\Gamma_1 \qquad (۲۲)$$

با توجه به شکل (۱)، Γ_1 و Γ_2 به ترتیب، مرزهای داخلی و خارجی استوانه می‌باشند.

از آنجا که انتگرالهای مرزی پس از ترکیب ماتریسهای المانی، در مرزهای میانی حذف می‌گردند، محاسبه آنها به المانهای ابتدایی و انتهایی محدود شده و بطور مثال، مقادیر هر یک از آنها در بردار $\{q^{(e)}\}$، بصورت رابطه (۲۳) می‌باشد:

$$\left\{q^{(1)}\right\}=\int_{\Gamma_1}[\aleph]^T q_0 d\Gamma_1=2\pi r_i q_0\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix} \qquad (۲۳)$$

$$\left\{q^{(n_f)}\right\}=\int_{\Gamma_2}[\aleph]^T h d\Gamma_2=2\pi r_o h T_\infty\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix} \qquad (۲۴)$$

عدد (۱) نشان دهنده اولین المان (در مرز داخلی استوانه) و n_f شماره آخرین المان (در مرز خارجی استوانه) است.

میدان جابجایی را می‌توان به فرم اجزاء محدود، بر طبق رابطه (۲۵) بیان نمود:

$$\{u(r,t)\}=[\aleph(r)]\left\{U^{(e)}(t)\right\} \qquad (۲۵)$$

فرم انتگرال مانده‌ها، بصورت رابطه (۲۶) می‌باشد:

$$\int_{\Omega}[\aleph]^T R\,d\Omega=0$$

$$R=\rho[\aleph]\left\{\ddot{U}^{(e)}\right\}-\frac{E}{(1+\nu)r}\left([\aleph]_{,r}-\frac{1}{r}[\aleph]\right)\left\{U^{(e)}\right\}-\left(\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right)_{,r}\left[\left((1-\nu)[\aleph]_{,r}+\frac{\nu}{r}[\aleph]\right)\left\{U^{(e)}\right\}-\alpha(1+\nu)\left([\aleph]\{T^{(e)}\}-T_0\right)\right]-\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\left((1-\nu)[\aleph]_{,r}+\frac{\nu}{r}[\aleph]\right)_{,r}\left\{U^{(e)}\right\}-\left(\alpha(1+\nu)([\aleph]\left\{T^{(e)}\right\}-T_0)\right)_{,r}\right] \qquad (۲۶)$$

با استفاده از قضیه گوس-گرین و مرتب‌سازی، فرم کلی رابطه اجزاء محدود به صورت رابطه (۲۸) بدست می‌آید:

$$\left[M^{(e)}\right]\left\{\ddot{U}^{(e)}\right\}+\left[K^{(e)}\right]\left\{U^{(e)}\right\}=\left\{f^{(e)}\right\} \qquad (۲۷)$$

در رابطه (۲۷):

$$\left[M^{(e)}\right]=\int_{\Omega}\rho[\aleph]^T[\aleph]d\Omega$$

$$\left[K^{(e)}\right]=-\int_{\Omega}[\aleph]^T\left\{\frac{E}{(1+\nu)r}\left([\aleph]_{,r}-\frac{1}{r}[\aleph]\right)+\left(\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right)_{,r}\left[(1-\nu)[\aleph]_{,r}+\frac{\nu}{r}[\aleph]\right]+\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\nu}{r}[\aleph]\right)_{,r}\right\}d\Omega+\int_{\Omega}(1-\nu)\left(\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\aleph]^T\right)_{,r}[\aleph]_{,r}d\Omega-\int_{\Gamma}\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\aleph]^T[\aleph]_{,r}.n_r d\Gamma$$

$$\left\{f^{(e)}\right\}=-\int_{\Omega}[\aleph]^T\left\{\alpha(1+\nu)\left(\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right)_{,r}\left([\aleph]\left\{T^{(e)}\right\}-T_0\right)+\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\alpha(1+\nu)\left([\aleph]\{T^{(e)}\}-T_0\right)\right)_{,r}\right\}d\Omega \qquad (۲۸)$$

٤- الگوریتم حل عددی

برای حل رابطه (۱۷)، باید از انتگرالگیری زمانی بهره جست [۱۵]. رابطه (۱۷) را می‌توان به فرم رابطه (۲۹) بازنویسی نمود:

$$\left[\hat{K}\right]_{j+1}\{T\}_{j+1}=\left[\overline{K}\right]_j\{T\}_j+\{q'\}_{j,j+1} \qquad (۲۹)$$

که در آن [۱۵]:

$$\left[\hat{K}\right]=[C]+a_1[K],\qquad \left[\overline{K}\right]=[C]-a_2[K] \qquad (۳۰)$$

$$\{q'\}=\{q\}\Delta t\qquad a_1=a_2=0.5\Delta t$$

و از آنجا، مقدار دما به صورت رابطه (۳۱) محاسبه خواهد شد:

$$\{T\}_{j+1}=[\hat{K}]^{-1}\left([\overline{K}]\{T\}_j+\{q'\}\right) \qquad (۳۱)$$

نکته شایان یادآوری این است که برای اعمال شرایط مرزی دوم، از روش پنالتی استفاده گردیده است [۱٤].

برای حل رابطه (۲۷) باید از انتگرالگیری زمانی بهره جست [۱۵]. مقدار جابجایی، از روابط (۳۲) و (۳۳) محاسبه می‌شود:

$$[\hat{K}]_{s+1}\{u\}_{s+1}=\left\{\hat{F}\right\}_{s,s+1} \qquad (۳۲)$$

$$[\hat{K}]_{s+1}=[K]_{s+1}+a_3[M]_{s+1} \qquad (۳۳)$$

$$\left\{\hat{F}\right\}_{s,s+1}=\{F\}_{s+1}+[M]_{s+1}\left(a_3\{u\}_s+a_4\{\dot{u}\}_s+a_5\{\ddot{u}\}_s\right)$$

$$a_3=\frac{4}{(\Delta t)^2}\qquad a_4=\frac{4}{\Delta t}\qquad a_5=\frac{-1}{2}$$

مقادیر سرعت و شتاب نقاط گره نیز از رابطه (۳٤) محاسبه می‌شوند:

$$\{\ddot{u}\}_{s+1}=a_3(\{u\}_{s+1}-\{u\}_s)-a_4\{\dot{u}\}_s-a_5\{\ddot{u}\}_s \qquad (۳٤)$$

$$\{\dot{u}\}_{s+1}=\{\dot{u}\}_s+a_2\{\ddot{u}\}_s+a_1\{\ddot{u}\}_{s+1}$$

$$a_1=0.5\Delta t\qquad a_2=a_1$$

بدین ترتیب، باید دو حدس اولیه برای جابجایی و سرعت درنظر گرفت و حدس اولیه شتاب را از رابطه (۳۵) بدست آورد:

$$\{\ddot{u}\}_0=[M]^{-1}\left(\{F\}_0-[K]\{u\}_0\right) \qquad (۳۵)$$

با توجه به اینکه ماتریسهای المانی خود به دما یا جابجایی وابسته‌اند، در هر مرحله تکرار از فاصله زمانی مورد بررسی، از روش به هنگام‌سازی متوالی استفاده شده است.

۵- اعمال شرایط مرزی هندسی و تنشی

دو نوع شرط مرزی تنشی و هندسی در نظر گرفته شده‌اند:
الف) تنش شعاعی دو مرز داخلی و خارجی استوانه، صفر است. در این حالت، از رابطه اول از روابط (۱۱) می‌توان نوشت:

$$\sigma_{rr}^{(e)} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\left[B^{(e)}\right]\left\{U^{(e)}\right\}+\left\{C^{(e)}\right\}\right) \qquad (۳٦)$$

$$\left[B^{(e)}\right]=(1-\nu)[\aleph]_{,r}+\frac{\nu}{r}[\aleph]$$

$$\left\{C^{(e)}\right\}=-\alpha(1+\nu)^{(e)}\left([\aleph]\left\{T^{(e)}\right\}-T_0\right)$$

حال با صفر قرار دادن مقدار تنش شعاعی می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} [B^{(1)}] & 0\cdots0 & 0 \\ \vdots & [\overline{K}] & \vdots \\ 0 & 0\cdots0 & [B^{(n_f)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^{(1)}\} \\ \vdots \\ \{U^{(n_f)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\{C^{(1)}\} \\ \{\overline{f}\} \\ -\{C^{(n_f)}\} \end{Bmatrix} \qquad (۳۷)$$

بدین ترتیب، مقادیر جابجایی در المان ابتدا و انتهای ضخامت با توجه به شرایط مرزی اعمال می‌گردد.
ب) جابجایی سطح بیرونی و تنش شعاعی سطح داخلی صفر است.

۶- نتایج

۶-۱- نتایج تحلیل انتقال حرارت گذرا

ابتدا تحلیل انتقال حرارت گذرا در استوانه‌ای با مشخصات هندسی و حرارتی مندرج در جداول (۱) و (۲)، انجام شده است.

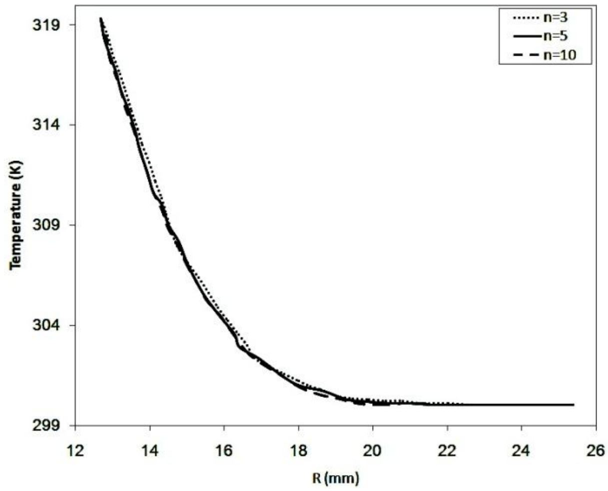
جدول ۱- مشخصات هندسی و پارامترهای حرارتی استوانه

کمیت	مقدار
شار حرارتی (q_0)	۱۰۰ (kW/m^2)
ضریب انتقال حرارت جابجایی (h)	۸ ($W/m^2{}^\circ K$)
شعاع داخلی (r_i)	۱۲/۷ (mm)
شعاع خارجی (r_o)	۲٥/٤ (mm)

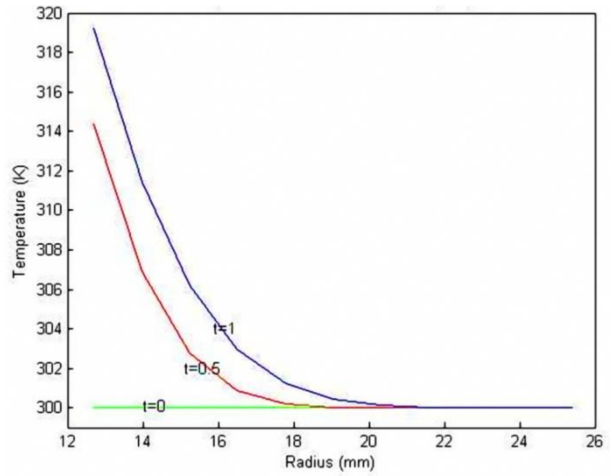
جدول ۲- خواص حرارتی غیر صفر مواد مورد بررسی

کمیات	فلز (Ti-6Al-4V)	سرامیک (Si_3N_4)
$\rho\ (Kg/m^3)$	۲۳۷۰	٤٤۲۹
$c\ (J/Kg^\circ K)$	٦۲٥/۲۹٦۹۲	٥٥٥/۱۱
$\kappa\ (W/m^\circ K)$	۱۳/۷۲۳	۱/۲۰۹٤۷
$E\ (GPa)$	۱۲۲/٥٥٦۷٦	۳٤۸/٤۳
ν	۰/۲۹	۰/۲٤
$\alpha\ (1/^\circ K)$	۷/٥۷۸۷ e -٦	٥/۸۷۲۳ e -٦
$P_1(\kappa)$	۰/۰۱۳۹۳۷٥	۰
$P_1(c)$	-٤/۲۲۳۸۷٥ e -٤	۱/۰۱٦ e -۳
$P_2(c)$	۷/۱۷۸٦٥۳٦ e -۷	۲/۹۲ e -۷
$P_3(c)$	۰	-۱/٦۷ e -۱۰
$P_1(E)$	-٤/٥۸٦۳٥ e -٤	-۰/۰۰۰۳۷
$P_2(E)$	۰	۲/۱٦ e -۷
$P_3(E)$	۰	-۸/۹٤٦ e -۱۱
$P_1(\nu)$	۱/۱۲۱۳٦ e -٤	۰
$P_1(\alpha)$	۰/۰۰۰٦٥	۹/۰۹٥ e -٤
$P_2(\alpha)$	۰/۳۱۳٤٦۷ e -٦	۰

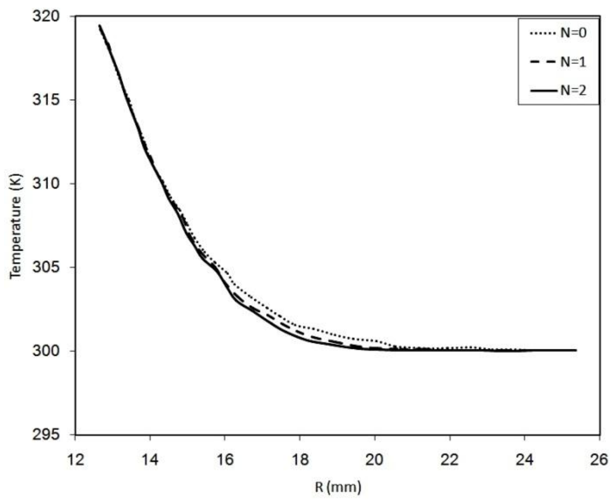
الف) نتایج شرط مرزی حرارتی نوع اول: اثر تعداد المانها (۳، ٥ و ۱۰ المان) در همگرایی پاسخ، برای N=۱ و t= ۱(s) ، در شکل (۲) نشان داده شده است. همگرایی نتایج برای تعداد المانهای مختلف بیانگر درستی و کفایت تعداد آنهاست. در شکل (۳)، توزیع دما برای N=1 برای زمانهای مختلف (صفر، ۰/٥ و ۱ ثانیه) آمده است. همانگونه که دیده می‌شود، توزیع دما با گذشت زمان به یک حالت پایا نزدیک می‌گردد. در شکل (٤) اثر مقادیر مختلف N بر توزیع دما، در زمان t= ۱(s) ، نشان داده شده است. با افزایش درصد مواد فلزی در مقادیر N بالاتر، گرادیان دما افزایش یافته است. نتایج بدست آمده در شکل (٤) آشکار می‌سازند که تاثیر تغییر مقدار N در توزیع دمای نواحی میانی ضخامت استوانه، چشمگیرتر است. توزیع دما با در نظر گرفتن وابستگی و نداشتن وابستگی خواص حرارتی به دما، برای N=۱ و t= ۱(s) ، در شکل (٥) آمده است. شکل (٥) بیانگر این مطلب است که خطای ناشی از نادیده گرفتن خصوصیات وابسته به دما، به نزدیک ۱٥٪ می‌رسد.



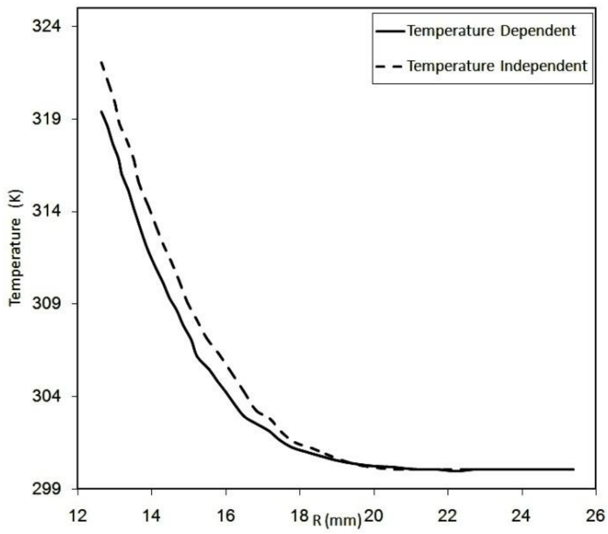
شکل ۲- اثر تعداد المانها بر روی همگرایی پاسخ برای شرط مرزی نوع اول.



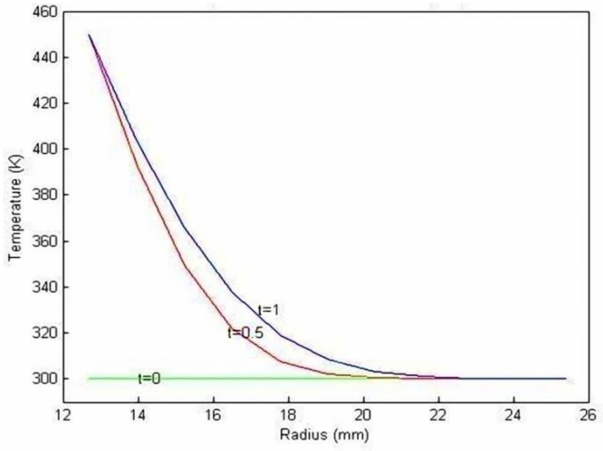
شکل ۳- توزیع دما در ازای N=۱ برای شرط مرزی نوع اول



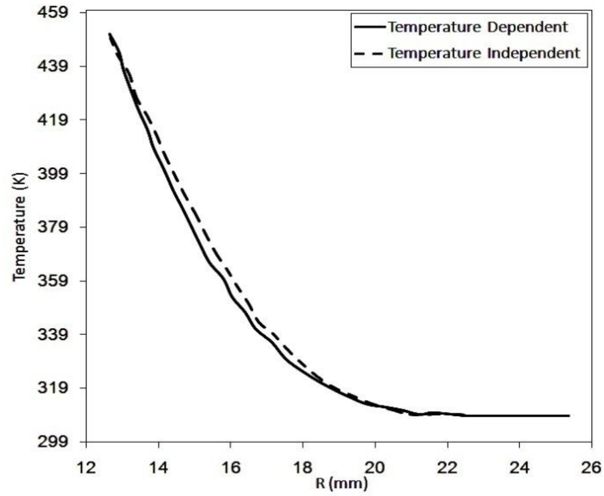
شکل ۴- مقایسه اثر مقادیر مختلف N بر توزیع دما برای شرط مرزی نوع اول.



شکل ۵- توزیع دما با در نظر گرفتن وابستگی و نداشتن وابستگی خواص حرارتی به دما برای شرط مرزی نوع اول.



شکل ۶- توزیع دما در ازای N=۱ برای شرط مرزی نوع دوم.



شکل ۷- توزیع دما با در نظر گرفتن وابستگی و نداشتن وابستگی خواص حرارتی به دما برای شرط مرزی نوع دوم.

ب) نتایج شرط مرزی حرارتی نوع دوم: در شکل (٦)، توزیع دما برای N=۱ برای زمانهای مختلف (صفر، ۰/۵ و ۱ ثانیه)،

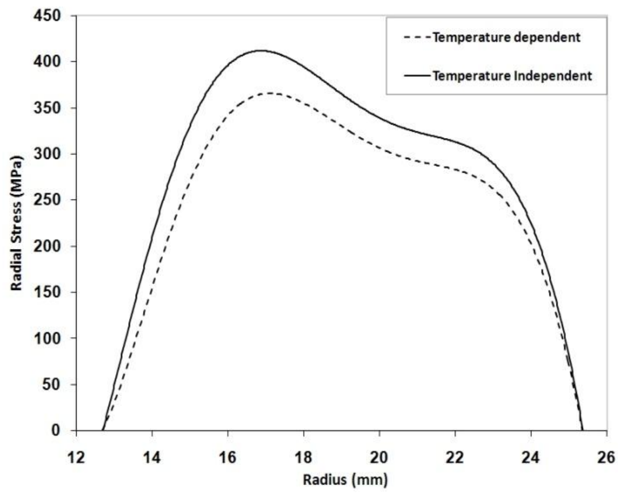
بدست آمده است.

توزیع دما با در نظر گرفتن وابستگی و عدم وابستگی خواص حرارتی به دما، برای N=۱ و t= ۱(s) ، در شکل شماره (۷) نشان داده شده است.

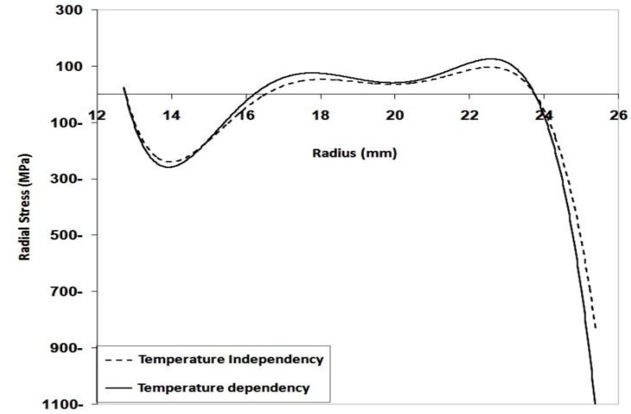
۶-۲- نتایج تحلیل تنشهای ترموالاستیک گذرا

نتایج بدست آمده برای تعیین میزان تاثیر در نظر گرفتن وابستگی ویژگیهای مواد به دما بر مولفه تنش شعاعی، برای شرایط مرزی دمایی و هندسی نوع اول و دوم، بترتیب در شکلهای (۸) و (۹) در زمان t= ۰/۳(s) ، و برای مقدار N=۱ نشان داده شده‌اند. وابستگی ویژگیهای مواد به دما، گرادیان دما را به ویژه در همسایگی مرز دارای دمای بزرگتر، افزایش داده و به پدید آمدن تنشهای ترموالاستیک بزرگتر می‌انجامد.

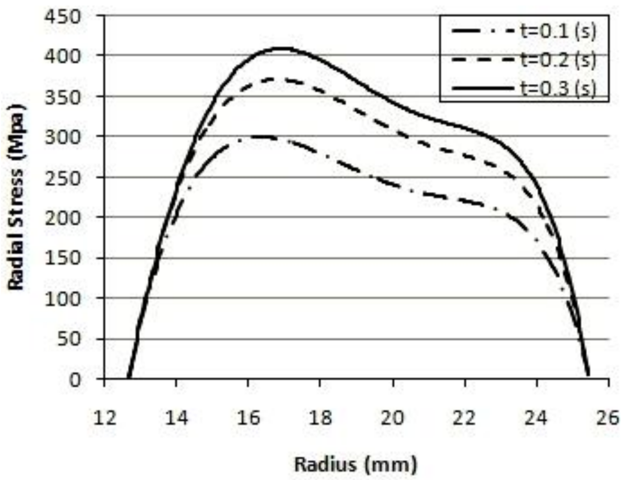
شکل (۸) اثر چشمگیر وابستگی ویژگیهای مواد به دما بر روی نتایج تنش شعاعی را آشکار می‌سازد. میزان خطای پدید آمده برای حالت بررسی شده در شکل (۸)، نزدیک ۲۰ درصد می‌باشد. با توجه به اینکه بیشتر تنشهای کاری اجزاء مکانیکی در نزدیکی تنشهای مجاز می‌باشند، خطای یاد شده از دیدگاه طراحی، قابل توجه است. با توجه به اینکه گرادیان دمای لایه-های داخلی استوانه بیشتر است، مقدار مولفه تنش شعاعی بدست‌آمده در همسایگی سطح داخلی استوانه بزرگتر است. با توجه به شکل (۸)، در اثر اعمال گرما به سطح داخلی استوانه، با توجه به آزاد بودن دو مرز داخلی و بیرونی استوانه برای شرط مرزی تنشی اول، لایه‌های مجاور به سطح خارجی (فلز) بیشتر از ذرات سطح داخلی (سرامیک) منبسط شده و به سمت خارج استوانه حرکت نموده و در نتیجه، تنشهای شعاعی مثبت پدید می‌آورند.



شکل ۸- بررسی اثر وابستگی ویژگیهای مواد به دما بر توزیع تنش برای N=۱ و t= ۰/۳(s) برای شرط مرزی دمایی و هندسی نوع اول.



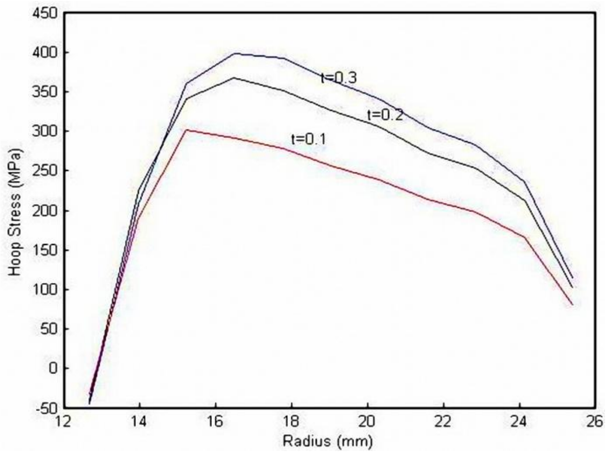
شکل ۹- بررسی اثر وابستگی ویژگیهای مواد به دما بر توزیع تنش شعاعی برای N=۱ و t= ۰/۳(s) برای شرط مرزی دمایی و هندسی نوع دوم.



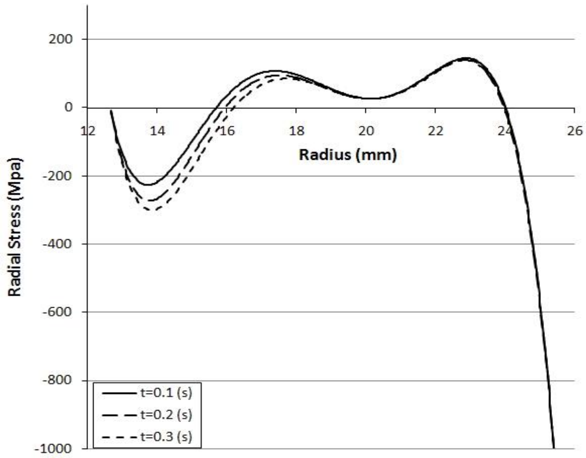
شکل ۱۰- روند تغییر توزیع تنش شعاعی بر حسب زمان (N=۱) برای شرط مرزی دمایی و هندسی نوع اول.

در شکل(۹) اثر وابستگی ویژگیهای مکانیکی و حرارتی مواد به دما برای تنشهای شعاعی حاصل از شرایط انتقال حرارت و هندسی نوع دوم نشان داده شده است. با توجه به مقید بودن سطح خارجی استوانه، (برای شرط مرزی نوع دوم) تنش شعاعی در لایه‌های داخلی به دلیل تمایل به انبساط بزرگتر در اثر داشتن دمای بیشتر، و نیز تنش شعاعی در مجاورت مرز داخلی به دلیل وجود قید سینماتیکی و ضریب انبساط بزرگتر لایه‌های خارجی به دلیل درصد فلز بیشتر، منفی است. این موضوع به ویژه با توجه به مقید بودن استوانه در جهت محوری و اثر پواسون ناشی از فشردگی استوانه در جهت محوری، تشدید می‌گردد. در شکلهای (۱۰) و (۱۱) ، بترتیب روند تغییرات زمانی مولفه‌های تنش شعاعی و محیطی استوانه (برای سه زمان(s) ۳/ ۰، ۰/۲، t=۰/۱) در ازای N=۱ برای شرط مرزی دمایی و هندسی نوع اول آمده است. توزیع تنشهای شعاعی و محیطی در شکلهای (۱۰) و (۱۱) بیان می‌دارد که به دلیل کاهش فاصله منحنیهای توزیع دما با زمان به دلیل نزدیک

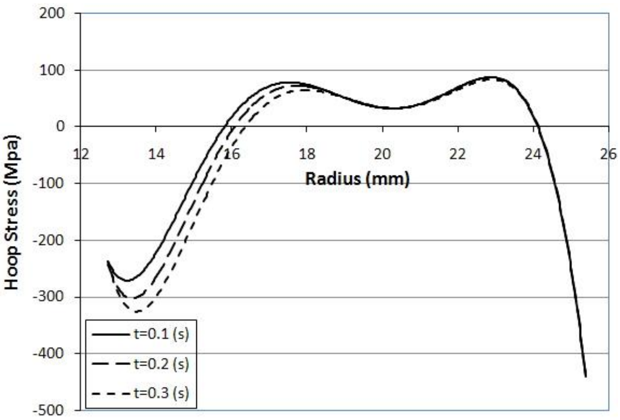
شدن به حالت پایا، تغییرات تنشهای ترموالاستیک با زمان کاهش می‌یابد. به دلیل مقید بودن لایه بیرونی و ضریب انبساط کوچکتر لایه داخلی، تنش محیطی در سطح داخلی استوانه فشاری بوده و مقدار آن در لایه‌های بعدی به دلیل امکان انبساط مناسبتر و افزایش نسبت فلز دارای ضریب انساط بزرگتر، مثبت و صعودی گشته است. با توجه به اینکه دمای لایه‌های خارجی کمتر است، مقدار تنش محیطی در این لایه‌ها کوچکتر است. همین نتیجه برای شرط مرزی دمایی و هندسی نوع دوم در شکلهای (۱۲) و (۱۳) آمده است. شکل (۱۲)، رفتار نشان داده شده در شکل (۹) را تایید می‌کند. با توجه به اینکه در شرط مرزی هندسی و تنشی نوع دوم، ذرات استوانه تمایل به حرکت به سمت داخل استوانه جهت تامین انبساط لازم دارند، تنشهای محیطی ایجاد شده در مجاورت مرزهای بیرونی و درونی، منفی می‌باشند.



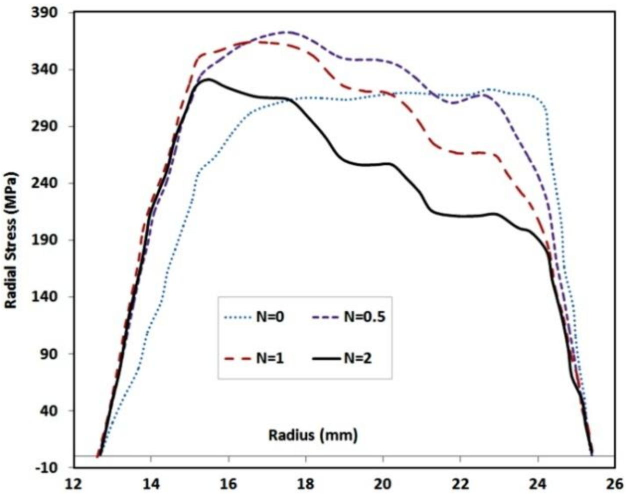
شکل ۱۱- روند تغییر توزیع تنش محیطی بر حسب زمان (N=۱) برای شرط مرزی دمایی و هندسی نوع اول.



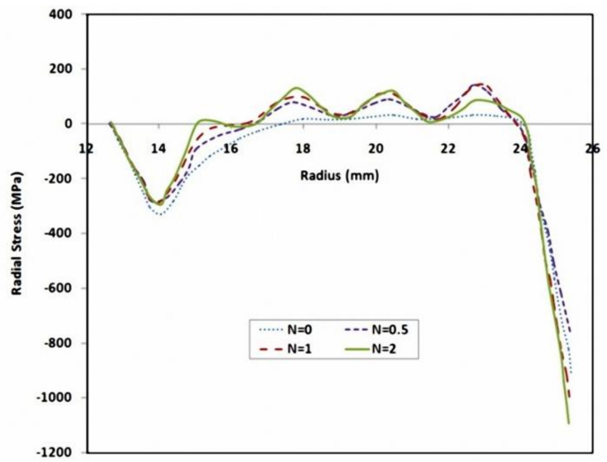
شکل ۱۲- روند تغییر توزیع تنش شعاعی بر حسب زمان (N=۱) برای شرط مرزی دمایی و هندسی نوع دوم.



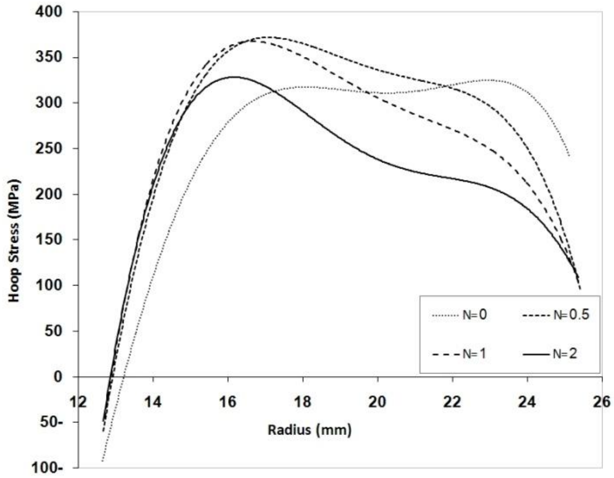
شکل ۱۳- روند تغییر توزیع تنش محیطی بر حسب زمان (N=۱) برای شرط مرزی دمایی و هندسی نوع دوم.



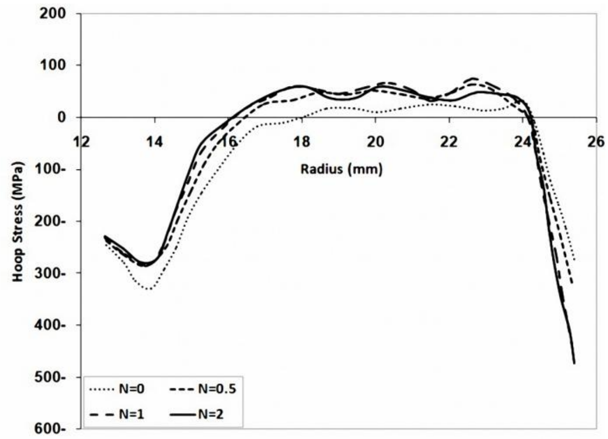
شکل ۱۴- روند تغییر توزیع تنش شعاعی به ازاء مقادیر N متفاوت در زمان t= ۰/۲(s) برای شرط مرزی دمایی و هندسی نوع اول.



شکل ۱۵- روند تغییر توزیع تنش شعاعی به ازاء مقادیر N متفاوت در زمان t= ۰/۲(s) برای شرط مرزی دمایی و هندسی نوع دوم



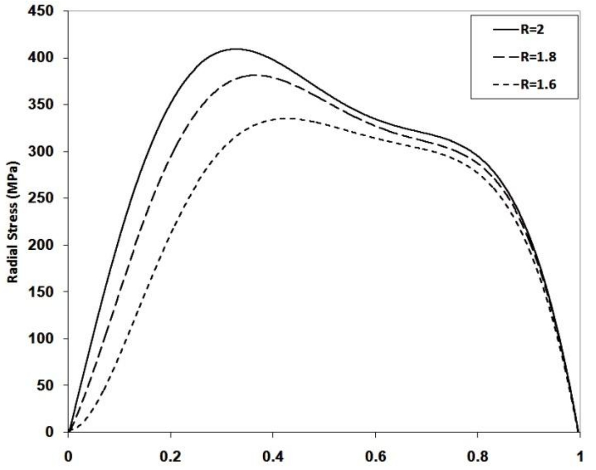
شکل ۱۶- روند تغییر توزیع تنش محیطی به ازاء مقادیر N متفاوت در زمان t= ۰/۲(s) برای شرط مرزی دمایی و هندسی نوع اول



شکل ۱۷- روند تغییر توزیع تنش محیطی به ازاء مقادیر N متفاوت در زمان t= ۰/۲(s) برای شرط مرزی دمایی و هندسی نوع دوم

در شکلهای (۱٤) و (۱۵) توزیع تنش شعاعی به ازاء مقادیر N متفاوت (N=۰، ۰/۵ ، ۱ ، ۲) در زمان t= ۰/۲(s) به ترتیب برای شرط مرزی دمایی و هندسی نوع اول و دوم نشان داده شده است. نتیجه یاد شده، برای تنش محیطی نیز در شکلهای (۱٦) و (۱۷) آمده است. نتایج نشان داده شده در شکلهای (۱٤) تا (۱۷) برای شرایط مرزی و حرارتی متفاوت، بیانگر اثر مهم توان N بر توزیع تنش است. رفتار استوانه برای N=۰ (استوانه سرامیکی)، به دلیل تفاوت چشمگیر توزیع دما و ضریب انبساط حرارتی در امتداد ضخامت استوانه سرامیکی، نسبت به استوانه ساخته شده از مواد هدفمند متمایز دیده است.

در شکل (۱۸) مقدار تنش شعاعی بر حسب پارامتر بی‌بعد $\frac{r-r_i}{r_o-r_i}$ و برای نسبتهای بی‌بعد مختلف $R=\frac{r_o}{r_i}$ و شرایط مرزی حرارتی و هندسی نوع اول آمده است. نتایج بدست آمده بیانگر افزایش میزان تنش شعاعی در همسایگی سطح دارای دمای بزرگتر و افزایش اختلاف تنش در شعاعهای مختلف، با افزایش ضخامت استوانه می‌باشد.



شکل ۱۸- تنشهای شعاعی بر حسب پارامتر بی‌بعد $\frac{r-r_i}{r_o-r_i}$ به ازاء N=۱ در زمان t= ۰/۳(s) برای مقادیر مختلف پارامتر R و شرط مرزی دمایی و هندسی نوع اول

۷- نتیجه‌گیری

در مقاله کنونی، در اولین گام، معادلات غیر خطی انتقال حرارت گذرا برای یک استوانه ساخته شده از مواد هدفمند، با در نظر گرفتن اثر تغییرات خواص مختلف با دما، به شیوه اجزاء محدود حل شده‌اند. بدین منظور، شرایط مرزی گوناگونی بررسی شده‌اند. تغییرات منحنیهای توزیع دما در زمانهای مختلف، برای مقادیر N مختلف، پایا شدن پاسخ با گذشت زمان را تایید می کند. تاثیر توان N بر توزیع دما در منطقه میانی ضخامت استوانه دیده شد. همچنین، نتایج بدست آمده بر اساس در نظر گرفتن وابستگی خواص حرارتی از قبیل ضریب هدایت و ظرفیت گرمایی به دما با نتایج فرض نداشتن وابستگی به دما، مقایسه گردیده‌اند. نتایج نشان می دهد که خطای ناشی از در نظر نگرفتن خصوصیات وابسته به دما برای انحراف از دمای محیط، خطای قابل توجهی را ایجاد می‌کند. این موضوع برای حالتی که دمای نقاط استوانه بسیار بالاتر از دمای محیط است، چشمگیرتر بوده و نیاز به بررسی تغییرات ویژگیهای وابسته به دما، با دما را تاکید می‌نماید.

در گام دوم، تنشهای ترموالاستیک حاصل از انتقال حرارت گذرا برای شرایط انتقال حرات و تنشی متفاوت بررسی گردیدند. در این تحلیل، اثر وابستگی ویژگیهای مواد بر توزیع تنش بررسی گشته است. نتایج بدست آمده بیانگر اثر چشمگیر وابستگی یاد شده می‌باشند. همچنین، اثر قابل توجه توان اختلاط ماده هدفمند بر مولفه‌های تنش شعاعی و محیطی را نشان می‌دهند. تغییرات مخلوط مواد و گرادیان حرارت، موجب تغییرات موضعی تنشها گشته و موجب ایجاد نواحی دارای

تنشهای فشاری و کششی گوناگون در امتداد ضخامت گشته‌اند.

نتایج بدست آمده همچنین، بیانگر متمایز بودن رفتار استوانه سرامیکی از استوانه ساخته شده از مواد هدفمند می‌باشند.

از برتریهای بارز مقاله کنونی، در نظر گرفتن تاثیر وابستگی ویژگیهای مواد به دما و برآورده نمودن دقیق شرایط مرزی تنشی در فرمولبندی اجزاء محدود بر حسب مولفه‌های جابجایی می‌باشد.

۸- مراجع

[۱] Noda, N.; "Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties", Appl. Mech. Rev., Vol. 44, pp. 83-97, 1991.

[۲] Tanigawa, Y.; "Some basic thermoelastic problems for non-homogeneous structural materials", Appl. Mech. Rev., Vol. 48, pp. 287-300, 1995.

[۳] Shen, H.S.; "Thermal postbuckling behavior of functionally graded cylindrical shells with temperature-dependent properties", International Journal of Solids and Structures, Vol. 41, pp. 1961-1974, 2004.

[٤] Zimmerman, R.W.; Lutz, M.P.; "Thermal stress and thermal expansion in a uniformly heated functionally graded cylinder", J Therm Stress, Vol. 22, pp.88–177, 1999.

[٥] Obata, Y.; Noda, N.; "Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material", Journal of Thermal Stresses, Vol.17, pp. 471–487, 1994.

[٦] Praveen, G.N.; Chin C.D.; Reddy, J.N.; "A pesedo-dynamic thermoelastic analysis of a compositionally graded ceramic-metal cylinder", Submitted for publication in ASCE Journal of Engineering Mechanics, 2005.

[٧] Liew, K.M.; Kitipornchai, S.; Zhang, X.Z.; Lim, C.W.; "Analysis of the thermal stress behavior of functionally graded hollow circular cylinders", International Journal of Solids and Structures, Vol. 40, pp. 2355–2380, 2003.

[٨] Jabbari, M.; Sohrabpour, S.; Eslami M.R.; "Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads", Int. J Pres. Ves. Pip., Vol. 79, pp. 493–7, 2002.

[٩] El-abbasi, N.; Meguid, S.A.; "Finite element modeling of the thermoelastic behavior of functionally graded plates and shells", Int J Comput Eng Sci, pp. 151–65, 2000.

[١٠] Praveen, G.N.; Reddy, J.N.; "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates", Int J Solids Struct, Vol. 35, pp. 4457–76, 1998.

[١١] Shao, Z.S.; Wang, T.J.; "Transient thermo-mechanical stresses of functionally graded cylindrical panels", AIAA JOURNAL, Vol. 45, No. 10, pp. 2487-2496, 2007.

[١٢] Shao, Z.S.; Wang, T.J.; Ang, K.K.; "Transient thermo-mechanical analysis of functionally graded hollow circular cylinders", Journal of Thermal stresses, Vol. 30, No. 1, pp. 81-104, 2007.

[١٣] Touloukian, Y.S.; "Thermophysical properties of high temperature solid materials", McMillan, New York, 1967.

[١٤] Bathe, K.J.; "Finite Element Procedures", Prentice-Hall, 2007.

[١٥] Reddy, J.N.; "An introduction to the finite element method", 3rd edition, McGraw-Hill Inc, 2005.

[١٦] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.; "The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals", 6th edition, Butterworth-Heinemann, 2005.